الفصل السادس .

العلاقة المتبادلة بين المستويات والعلاقة بين المستوي والمستقيمات الخارجة عنه

العلاقة المتبادلة بين مستويين .

العلاقة المتبادلة بين مستو ومستقيم خارج عنه .

تحديد خط تقاطع مستويين (الفصل المشترك) .

تقاطع مستقيم مع مستو في الحالة العامة .

توازي مستقيم ومستو .

توازي المستويات .

التعامد المتبادل بين مستقيم ومستو .

تعامد مستقيمين .

تحديد المستويات المتعامدة .

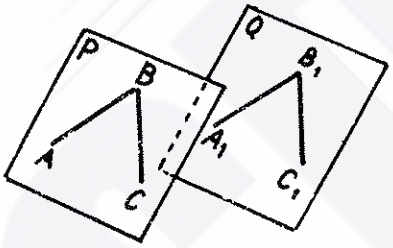
اسقاط زاوية بين مستقيم ومستو .

تحديد مساقط زاوية بين مستويين .

VI ـ١ـ العلاقة المتبادلة بين مستويين :

ان العلاقة المتبادلة بين أي مستويين يمكن أن تكون احدى حالتين لاثالث لهما : فاما أن يكونا متوازيين أو متقاطعين ٠

في أي مستويين متوازيين (كالمستويين P و Q في الشكل ١٤٠) يمكن ايجاد مستقيمين متقاطعين متوازيين ٠



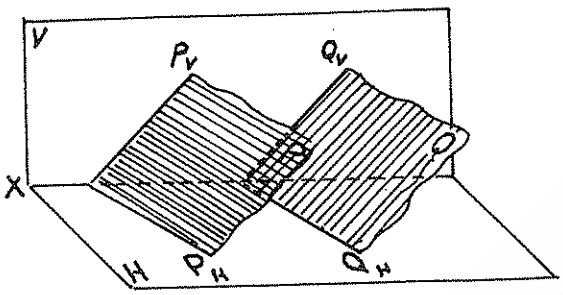
شكل رقم (١٤٠)

وهذه الحالة تُعد القاعدة الأساسية في تحديد الوضع المتبادل لمستويين ، وفيما اذا كانا متوازيين أم غير متوازيين ٠ وهذه القاعدة يمكن أن تصاغ على النحو التالي : اذا وازى مستقيمان متقاطعان في مستو مستقيمين متقاطعين واقعين في مستو آخر فان المستويين متوازيان ٠ فالشكل (١٤٠) يوضح أن المستقيمين المتقاطعين AB و BC الواقعان في المستوي P يوازيان المستقيمين المتقاطعين A_1B_1 و B_1C_1 الواقعين في المستوي Q وبالتالي نجد أن المستويين P و Q متوازيان ٠

وهذه القاعدة تَعُدُ آثار المستويات المتقاطعة مستقيمات معنية ، ولهذا نلاحظ من خلال الشكل (١٠) أن المستويين P و Q متوازيان ،

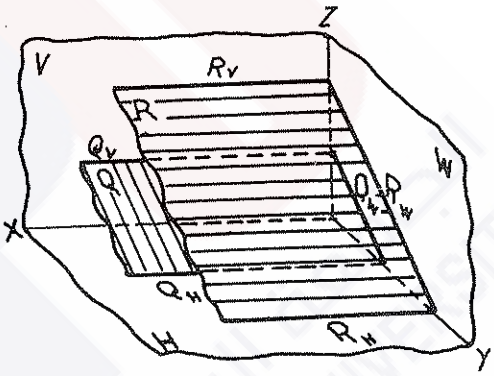
لأن أثري الأول الأفقي والأمـــامي المتقاطعين (المتلاقيين) عنـد خط الأرض يوازيان أثري الثـــاني اللذين يماثلان الأول ، أي :

P_v // Q_v و P_h // Q_h .

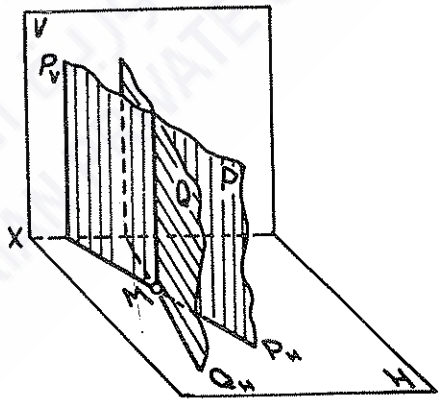


شكل رقم (١٤١)

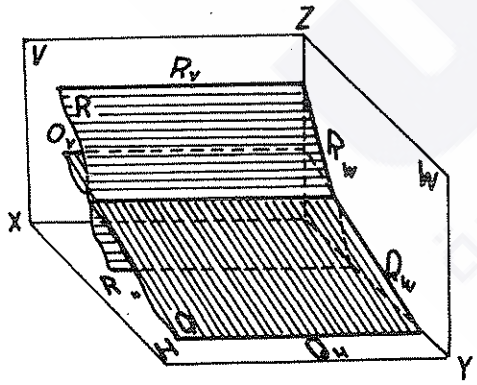
والشيء نفسه يمكن أن نقولـــه بالنسبة للمستويين Q و R في الشكل (١٤٢) R_v // Q_v و R_h // Q_h و R_w // Q_w . من جهة أخرى يكفي أن يتقاطع أثران متماثلان لتكـــون المستويات متقاطعة. فالشكل (١٤٣) يوضح أن الأثرين الأماميين متوازيـــان (P_v // Q_v) ، لكن الأثرين الأفقيين P_h و Q_h متقاطعان لذلك يكـــون المستويان P و Q متقاطعين .



شكل رقم (١٤٢)



شكل رقم (١٤٣)



شكل رقم (١٤٤)

من الضروري هنا التأكيد على أن أثري المستوي اللذين يوازيـــان

نظيريهما في مستو آخر لابد أن يكونا متلاقيين ، ليحققا شرط التوازي لمستويهما ، وبعكسه لايمكن الجزم بالوضع المتبادل للمستويين • فعندما تكون الآثار R_v // R_h و Q_v // Q_h و R_v // Q_v و R_h // Q_h في الوقت نفسه لايمكننا أن نعرف ان كان المستويان متوازيين أم متقاطعين• ولتحديد ذلك لابد أن نتحقق من العلاقة المتبادلة بين الأثرين الباقيين ، أي الأثرين الجانبيين R_w و Q_w • ففي الشكل (١٤٤) نجد على الرغم من أن R_v // Q_v و R_h // Q_h أن المستويين R و Q متقاطعان ، لأن مسقطيهما الجانبيين R_w و Q_w متقاطعان • فاذا لم تكن المستويات محددة بآثارها فان تحديد وضعها المتبادل يحتاج الى انشاءات مساعدة سنعرضها لاحقا •

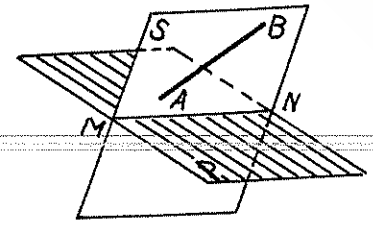
VI ـ٢ـ العلاقة المتبادلة بين مستو ومستقيم خارج عنه :

ان العلاقة بين مستقيم ومستو يمكن ـ كما هو الحال بالنسبة للعلاقة بين مستويين ـ أن تكون احدى الحالتين التاليتين :

١ـ مستقيم يتقاطع مع المستوي ، أو

٢ـ مستقيم يوازي المستوي •

يصعب أحيانا في التعبير الاسقاطي أو الفراغي أن نحدد العلاقة المتبادلة بين المستقيم والمستوي • وفي مثل هذه الحالات نستخدم انشاءات مساعدة ننتقل فيها من مسألة تحديد العلاقة بين مستو ومستقيم خارج عنه الى مسألة تحديد العلاقة المتبادلة بين المستقيم المعني ومستقيم مساعد آخر •ولهذا الغرض نمرر من المستقيم المعني AB (الشكل ١٤٥) مستويا مساعدا S يقطع



شكل رقم (١٤٥)

المستوي المعني P ثم ندرس العلاقة بين المستقيم AB وخط تقاطع المستويين MN ، وفي هذه الحالة نلاحظ أحد الاحتمالين :

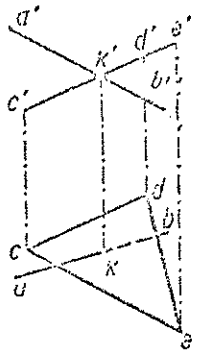
١ـ المستقيمان AB و MN متقاطعان ، وهذا يعني أن المستقيم AB يقطع المستوي المعني P .

٢ـ المستقيم AB يوازي المستقيم MN ، وهذا يعني حسب بديهيات التوازي أن المستقيم AB يوازي المستوي P .

من الضروري أن نشير في هذا المجال الى أننا عند اختيار المستوي المساعد يجب أن نختار وضعيته بحيث نجد أن العلاقة الناشئة بين العناصر المعنية تكون بسيطة ومباشرة أو أن ايجادها يتطلب خطوات قليلة .

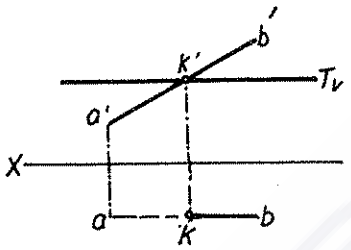
VI ـ٢ـ١ـ تقاطع مستقيم مع مستو اسقاطي :

عندما يكون المستوي اسقاطيا نرى أن مسقطه على المستوي المتعامد معه ـ مهما كان شكل تحديده ومهما كانت العناصر الهندسية التي تحدده ـ يكون خطا مستقيما منطبقا على أثره ، ونجد أن مساقط جميع العناصر الهندسية الواقعة عليه ، أي : على مستوي الاسقاط ، تنطبق على هذا المستقيم ، أي : على أثره . وضمن هذه العناصر تقع بالتأكيد نقطة تقاطع المستقيم الخارج عنه والمتقاطع معه . لدينا في الشكل (١٤٦) مستو اسقاطي أمامي محدد بالمثلث CDE والمستقيم المتقاطع معه AB . ولما كان المستوي اسقاطيا أماميا فان مسقطه الأمامي يكون خطا مستقيما c'd'e' وتمثل النقطة k' الواقعة



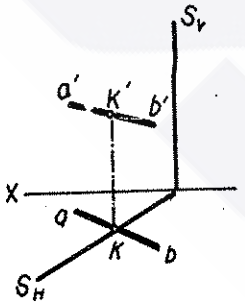
شكل رقم (١٤٦)

عليه المسقط الأمامي لنقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي • بعد ذلك يمكننا بسهولة تحديد مسقطها الأفقي k بانزال مستقيم شاقولي حتى يتقاطع مع ab في النقطة k •



شكل رقم (١٤٧)

لدينا في الشكل (١٤٧) المستوي T الموازي لمستوي الاسقاط الأفقي ، أي مستوي اسقاطي ثنائي (مستو اسقاطي أمامي وجانبي في آن معا) ولهذا يكون لدينا في التعبير الاسقاطي الثنائي أثره الأمامي T_V ، ولدينا أيضا المستقيم AB المتقاطع معه • وأما نقطة التقاطع فاننا نحددها من خلال مسقطها الأمامي k' الحاصل من تقاطع أثر المستوي T_V والمسقط الأمامي a'b' للمستقيم ، ثم نحدد بعد ذلك مسقطها الأفقي بالطريقة السابقة نفسها •



شكل رقم (١٤٨)

يمثل الشكل (١٤٨) تقاطع المستقيم AB مع مستو اسقاطي أفقي S محدد بأثاره• وهنا أيضا تحدد نقطة تقاطعهما من خلال تحديد مسقطها الأفقي k من تقاطع المسقط الأفقي ab للمستقيم مع أثر المستوي الأفقي S_h ، ثم نحدد المسقط الأمامي k' بالطريقة السابقة نفسها •

VI ـ٢ـ٢ـ تحديد الأوضاع المتبادلة للمستقيمات المتقاطعة مع مستويات :

أشرنا في الفصل الثالث (III ـ٦) من خلال تحديد الوضع الفراغي

للمستقيم بالنسبة لمستويات الاسقاط الى التمييز بين الأجزاء المرئية وغير المرئية من المستقيم حسب موقعه بالنسبة لمستويات الاسقاط ٠

وفي موضوعنا الحالي سندرس الأوضاع المتبادلة بين المستقيم والمستوي المتقاطع معه وتحديد أجزاء المستقيم المخفية الواقعة تحت المستوي المتقاطع معه ٠ وهنا أيضا سنستخدم التنقيط ، أي : الخط المتقطع ، في الاشارة الى الأجزاء المخفية من العنصر الهندسي ٠ ان معرفة طريقة تحديد هذه الأوضاع المتبادلة بين المستقيم والمستوي المتقاطع معه تمثل الأساس في تحديد الوضع المتبادل بين المستويات المتقاطعة ٠

من المتعارف عليه افتراض أن العناصر الهندسية هي عناصر غير شفافة سواء أكانت نقطة أم مستقيما أم مستويا ٠ ولهذا نجد أن بعض العناصر الهندسية الواقعة على مستقيم اسقاطي واحد يغطي بعضها الآخر ، ويكون أعلاها مرئيا فحسب ٠ في الشكل (١٤٦) يخترق المستقيم AB المستوي CDE في النقطة K ، وبالتالي يصبح جزء منه فوق المستوي ويغدو جزء آخر منه تحته ٠ ولهذا نجد أن الجزء KB من المستقيم يغطى بالمستوي CDE وبالتالي يكون غير مرئي ، ولذلك يرسم الجزء kb من المسقط الأفقي للمستقيم بخط متقطع (منقط) ٠ المستقيم AB يخترق المستوي T في الشكل (١٤٧) والمستوي S في الشكل (١٤٨) في النقطة K ، وبالتالي نجد أن الجزء KA من المستقيم يغطى بالمستوي ، ولهذا نرى أن الجزء ka من المسقط الأفقي في الشكل الأول والجزء k'a' من المسقط الأمامي في الشكل الثاني يكونان مخفيين ، نرمز لهما بخط متقطع (منقط) ٠

ذكرنا أن واحدة من النقاط الواقعة على مستقيم اسقاطي واحد (خط تداع) تكون مرئية ، وهي العليا ، وهذا يعني مايلي :

١ـ بالنسبة لمستوي الاسقاط الأفقي H تكون النقطة المرئية هي النقطة الأكبر بُعدا عن H .

١ـ بالنسبة لمستوي الاسقاط الأمامي V تكون النقطة المرئية هي النقطة الأكبر بُعدا عن V .

٢ـ بالنسبة لمستوي الاسقاط الجانبي W تكون النقطة المرئية هي النقطة الأكبر بُعدا عن W .

واذا كنا نستخدم التعبير الاسقاطي المحوري فان تحديد النقاط المرئية يتم على أساس خطوط تداعيها وبُعد المساقط التي تناظرها عن محور الاسقاط ، وهذا يعني مايلي :

١ـ بالنسبة لمستوي الاسقاط الأفقي H تكون النقطة المرئية هي النقطة ذات المسقط الأمامي الأبعد عن محور الاسقاط ، أي : عن خط الأرض OX .

٢ـ بالنسبة لمستوي الاسقاط الأمامي V تكون النقطة المرئية هي النقطة ذات المسقط الأفقي الأبعد عن محور الاسقاط ، أي:عن خط الأرض OX .

٣ـ بالنسبة لمستوي الاسقاط الجانبي W تكون النقطة المرئية هي النقطة ذات المسقط الأفقي الأبعد عن محور الاسقاط OY أو ذات المسقط الأمامي الأبعد عن محور الاسقاط OZ .

لندرس الآن كيفية تحديد النقاط المرئية في التعبير الاسقاطي الشامل (دون استخدام محاور الاسقاط) ، ولنأخذ المثال الذي يوضحه الشكل (١٤٩):

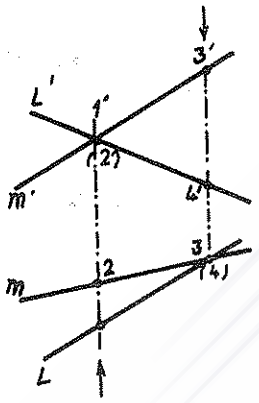
لدينا الوضع الاسقاطي الشامل الثنائي لمستقيمين متخالفين M و L :

١ـ النقطتان 1 و 2 تقعان على مستقيم اسقاطي أمامي (خط تداع) واحد .

٢ـ النقطتان 3 و 4 تقعان على مستقيم اسقاطي أفق (خط (خط تداع) واحد .

اذا درسنا مساقط هذين المستقيمين نجد أن :

١ـ نقطة تقاطع المستقيمين الأفقيين تمثل نقطة تطابق احداهما (النقطة 3) التي تنتمي الى المستقيم M ، والأخرى (النقطة 4) التي تنتمي الى المستقيم L . ولما كان 3'3 > 4'4 فان النقطة المرئية بالنسبة لمستوي الاسقاط الأفقي H تكون هي النقطة 3 التي تنتمي الى المستقيم M . وأما النقطة 4 التي تنتمي الى المستقيم L فستكون مخفية ، لأنها مغطاة بالنقطة 3 .



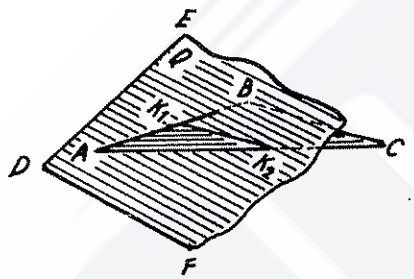
شكل رقم (١٤٩)

٢ـ نقطة تقاطع المسقطين الأماميين تمثل نقطة تطابق مسقطي نقطتين احداهما (النقطة 1) التي تنتمي الى المستقيم L ،والأخرى (النقطة 2) التي الى المستقيم M . ولما كان 1 1' > 2 2' فان النقطة المرئية بالنسبة لمستوي الاسقاط الأمامي V تكون هي النقطة 1 التي تغطي النقطة 2 ، فتكون الأخيرة مخفية .

هذه الطريقة هي طريقة عامة يمكن استخدامها في الاسقاط المحوري أيضا ، تستخدم أيضا في تحديد أوضاع المستويات المتقاطعة .

VI ـ٣ـ تحديد خط تقاطع مستويين (الفصل المشترك) :

اذا لم يكن المستويان ـ كما ذكرنا سابقا ـ متوازيين فلابد أن يكونا متقاطعين ، ونتيجة تقاطعهما نحصل على مستقيم مشترك بينهما نسميه بالفصل المشترك للمستويين أو خط تقاطعهما • ولتحديد مستقيم ما يكفينا ـ كما هو معروف لدينا ـ أن نحدد نقطتين منه أو نقطة واحدة منه اذا كان اتجاهه معروفا •



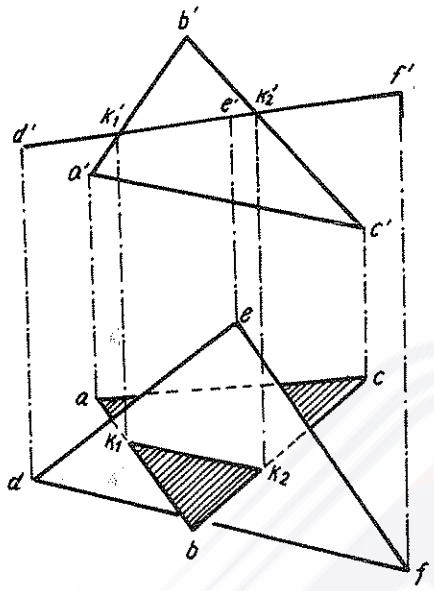
شكل رقم (١٥٠)

لندرس الحالة التي يوضحا الشكل (١٥٠) : لدينا المستوي المحدد بالمثلث ABC والمستوي Q المتقاطع معه والمحدد بالمستقيمين DE و DF • المستقيم K_1K_2 يمثل خط تقاطع المستويين ، ومن جهة أخرى تمثل النقطة K_1 نقطة اختراق المستقيم AB للمستوي Q ، وتمثل النقطة K_2 نقطة اختراق المستقيم AC للمستوي Q ، ولهذا تنتمي هاتان النقطتان الى كلا المستويين في وقت واحد •

ولذلك نحتاج في الحالة العامة من تحديد خط تقاطع المستويين الى تحديد نقطتين مشتركتين بينهما • ولايجاد كل من هاتين النقطتين نحتاج اعتياديا الى انشاء خاص ، ولكن اذا كان واحد من هذين المستويين على الأقل مستويا اسقاطيا فان حل هذه المسألة ، أي : ايجاد مساقط نقاط التقاطع ، يسهل كثيرا •

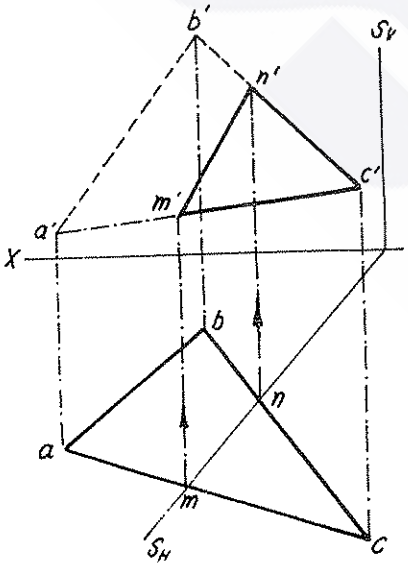
لنأخذ الحالة التي يوضحها الشكل (١٥١) : لدينا مستويان متقاطعان محددان بالمثلثين ABC و DEF الذي يمثل مستويا اسقاطيا

أماميا ولهذا نجد أن مسقطه الآمامي يمثله المستقيم d'e'f' ، وتمثل النقطتان k'_1 و k'_2 المسقطين الأماميين لنقطتي تقاطع (اختراق) المستقيمين AB و BC للمستوي DEF وبالتالي نجد أن هاتين النقطتين تنتميان في آن الى كلا المستويين ، وهذا يعني أنهما واقعتان على خط تقاطعهما . ولذلك نوجد مسقطيهما الأفقيين k_1 و k_2 على كل من مسقطي المستقيمين AB و BC الأفقيين ab و bc ، ونوصل بينهما فنحصل على المسقط الأفقي k_2k_1 لخط التقاطع . وأما مسقطه الأمامي فيمثله مقطع المستقيم $k'_1\ k'_2$ المنطبق على المسقط الأمامي d'e'f' للمستوي DEF .



شكل رقم (١٥١)

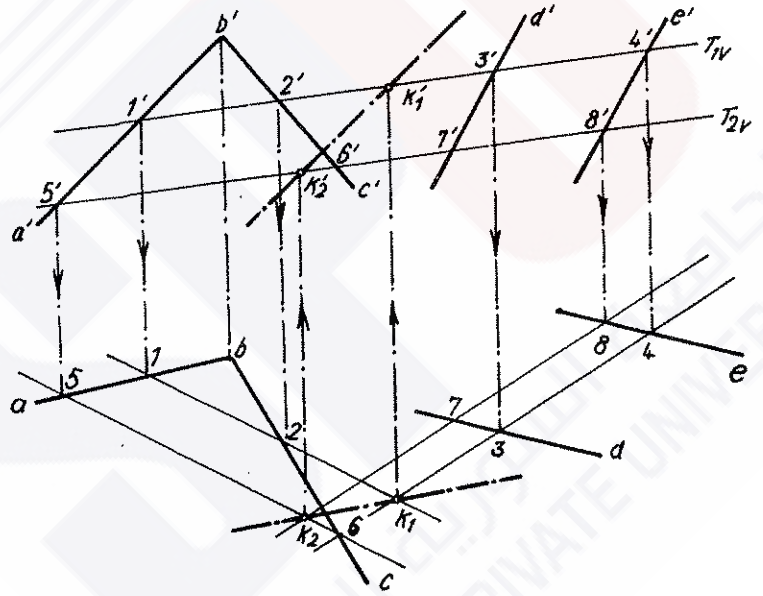
يوضح الشكل (١٥٢) مثالا آخر على الوضعية الخاصة للمستويات المتقاطعة: لدينا مستو اسقاطي أفقي S محدد بأثريه ومتقاطع مع مستو محدد بالمثلث ABC . ففي هذا المثال نحصل مباشرة من المسقط الأفقي للمستويين والذي يمثله أثر المستوي الأفقي S_h والمسقط الأفقي abc للمستوي الثاني على



شكل رقم (١٥٢)

المسقط الأفقي لخط التقاطع mn ، حيث أن النقطتين n و m تمثلان المسقطين الأفقيين لنقطتي تقاطع المستقيمين BC و AC مع المستوي S ، ولذلك تنتميان لكلا المستويين في آن ، ثم نحدد على المسقطين الأماميين b'c' و a'c' المسقطين الأماميين n' و m' لنقطتي التقاطع ، وحين نصل بينهما نحصل على المسقط الأمامي m'n' لخط تقاطع المستويين .

لندرس الآن الحالة العامة لتقاطع مستويين ليسا في وضعية خاصة، ولنفترض أن لدينا مستويين متقاطعين ، أحدهما P محدد بمستقيمين



شكل رقم (١٥٣)

متقاطعين AB و BC ، والآخر Q محدد بمستقيمين متوازيين D و E . والمطلوب أن نحدد خط تقاطعهما (فصلهما المشترك) .

للتوصل الى حل مثل هذه المسائل لابد ـ كما ذكرنا سابقا ـ أن نستخدم انشاءات مساعدة (الشكل ١٥٣) ولحل هذه المسألة نستخدم مستويين اسقاطيين أماميين (يمكن أيضا أن نستخدم مستويين اسقاطيين

أفقيين أو نستخدم واحدا أماميا وآخر أفقيا) فنحصل اسقاطيا على الأثر الأمامي T_{1v} و T_{2v} لكل منهما ٠

ان تقاطع ثلاثة مستويات يعطينا ـ كما ذكرنا في الفصل الأول من هذا الكتاب عند الحديث عن التعبير الاسقاطي الثلاثي ـ نقطة واحدة مشتركة بينهما ، تمثل نقطة تلاقي (تقاطع) فصولهم المشتركة ٠ وعلى هذا الأساس نجد في مسألتنا هذه أن تقاطع المستوي T_1 مع المستويين المعنيين سيعطينا نقطة مشتركة بينهما ، تقع ضمنا على الفصل المشترك بين المستويين المعنيين وأن تقاطع T_2 معهما سيعطينا نقطة ثانية واقعة أيضا على هذا الفصل المشترك ٠ ولذلك نقوم بعد امرار T_1 و T_2 بالخطوات التالية :

١ـ نحدد خط تقاطع T_1 مع المستوي P ، وهو المستقيم 2 1،بالطريقة التي توضحها الأمثلة السابقة من هذه الفقرة ٠

٢ـ نحدد خط تقاطع T_1 مع المستوي Q ، وهو المستقيم 4 3،بالطريقة ذاتها ٠

٣ـ من تقاطع 2 1 و 4 3 نحصل على النقطة المشتركة الأولى K_1 بين المستويات الثلاثة والواقعة ضمنا على الفصل المشترك بين P و Q ٠

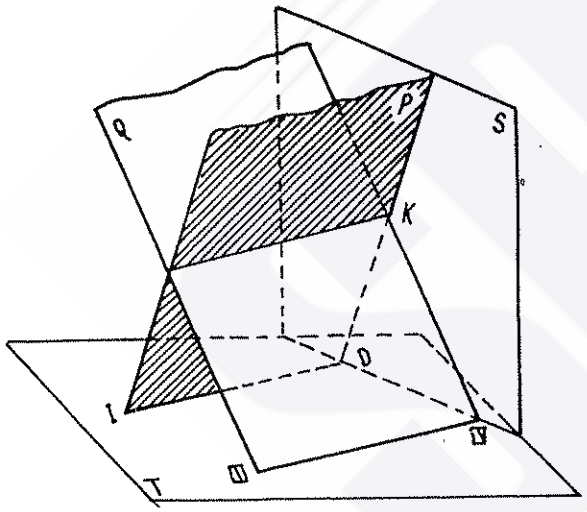
٤ـ نحدد خط تقاطع T_2 مع المستوي P ، وهو المستقيم 6 5،بالطريقة نفسها ٠

٥ـ نحدد خط تقاطع T_2 مع المستوي Q ، وهو المستقيم 8 7،بالطريقة ذاتها ٠

٦ـ من تقاطع 6 5 و 8 7 نحصل على النقطة المشتركة الثانية K_2 بين المستويات الثلاثة والواقعة ضمنا على الفصل المشترك بين P و Q ٠

٧ـ حين نصل بين K_1 و K_2 نحصل على الفصل المشترك K_1K_2 والمطلوب بين المستويين P و Q ٠

نحصل في بعض الأحيان ، عند استخدام مستو اسقاطي مساعد (أمامي، أو أفقي ، أو جانبي) أو أكثر على فصول مشتركة لهذا المستوي مع المستويات المعنية بحيث تكون متوازية ٠ وللتأكد من الوضعية المتبادلة الحقيقية بين هذه المستويات لابد أن نستخدم مستويا اسقاطيا مساعدا آخر عموديا على مستوي اسقاط غير المستوي المتخذ في الحالة الأولى ٠ مثلا : نحصل عند استخدام مستو اسقاطي أمامي مساعد T (الشكل ١٥٤) على فصل مشترك (I ـ II) بينه وبين المستوي P ، يوازي الفصل المشترك (III ـ IV) بين المستويين T و Q ٠ وللتأكد من العلاقة المتبادلة بين المستويين P و Q لابد أن نأخذ مستويا اسقاطيا مساعدا آخر ، هو في هذه المرة اسقاطي أفقي S ،

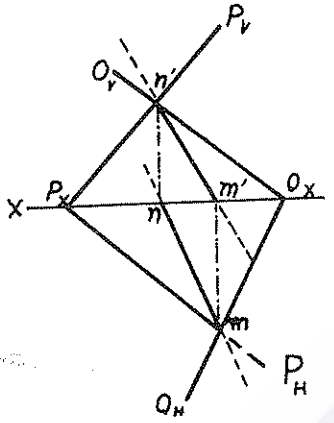


شكل رقم (١٥٤)

فنجد أن الفصول المشتركة بينه وبين المستويين P و Q تتقاطع في النقطة K ٠ وهذا يعني أن المستويين P و Q متقاطعين والفصل المشترك بينهما يمثل مستقيما أفقيا يمر من النقطة K ويوازي المستقيمين (I-II) و(III-IV) ٠

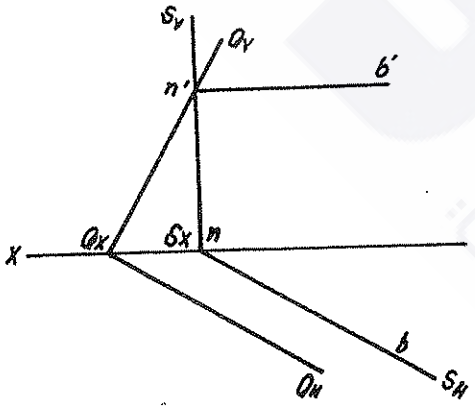
اذا كانت المستويات المتقاطعة محددة بآثارها ، فان نقاط تقاطع

آثارها المتشابهة تمثل النقاط المشتركة بينها ، أي النقاط الواقعة على فصلهما المشترك (الشكل ١٥٥) .

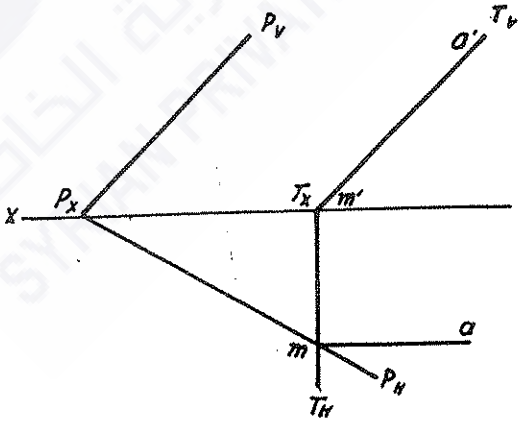


شكل رقم (١٥٥)

ان هذه القاعدة لاتشكل استثناء من الطريقة السابقة ، ولكنها تمثل حالة خاصة بها ، تكون فيها المستويات الاسقاطية المساعدة المستخدمة هي مستويات الاسقاط نفسها وتمثل الفصول المشتركة بينها وبين المستويات المعنية آثار هذه المستويات الأخيرة في مستويات الاسقاط . من جهة أخرى نجد أن تقاطع الآثار المتماثلة تمثل أثر المستقيم المشترك بين المستويين ، أي فصلهما المشترك ، في مستوي الاسقاط المعني . وفي هذه الحالة تكون لدينا نقطتان من نقاط خط التقاطع المطلوب . ولرسم مساقط خط تقاطع مستويين محددين بآثارهما (مثلا P و Q في الشكل ١٥٥) يكفي أن :



شكل رقم (١٥٧)



شكل رقم (١٥٦)

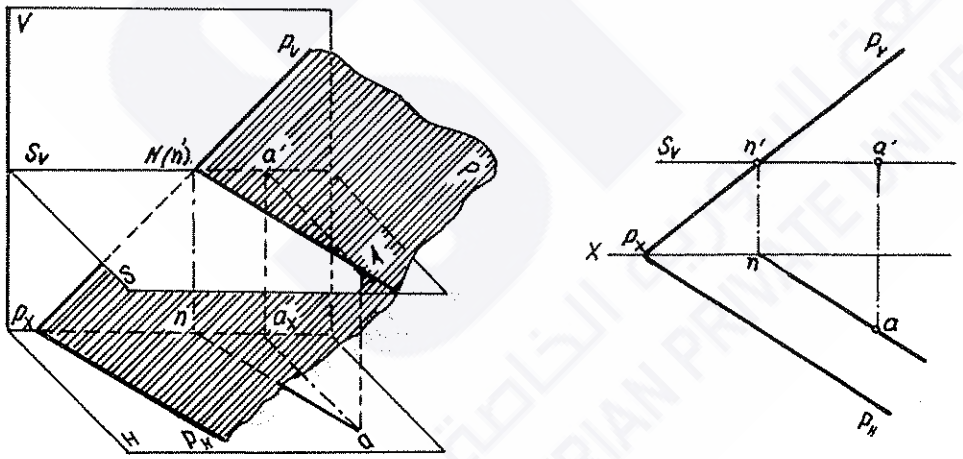
١ـ نوجد نقطة تقاطع الأثرين الأفقيين P_h و Q_h للمستويين وهي نقطة m التي تمثل الأثر الأفقي لخط التقاطع المنطبق على مسقطه الأفقي ٠

٢ـ نوجد المسقط الأمامي للأثر الأفقي الذي تمثله النقطة m' الواقعة على خط الأرض ٠

٣ـ نوجد نقطة تقاطع الأثرين الأماميين P_v و Q_v للمستويين ، وهي النقطة n' التي تمثل الأثر الأمامي لخط التقاطع المنطبق على مسقطه الأمامي ٠

٤ـ نوجد المسقط الأفقي للأثر الأمامي الذي تمثله النقطة n الواقعة على خط الأرض ٠

٥ـ نوصل بين m و n فنحصل على المسقط الأفقي لخط تقاطع المستويين P و Q ، ونوصل بين m' و n' فنحصل على مسقطه الأمامي ٠



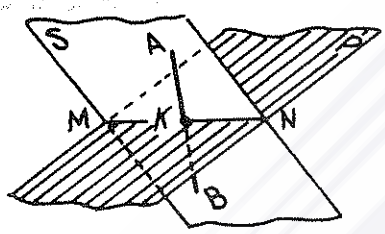
شكل رقم (١٥٨)

ان الأشكال (١٥٦ و ١٥٧ و ١٥٨) توضح لنا حالات يكون فيها اتجاه خط التقاطع بين مستويين محددين بآثارها معلوما لأن أحد هذين المستويين هو مستو اسقاطي ٠ وفي مثل هذه الحالات نحتاج الى تحديد نقطة واحدة

من نقاط خط التقاطع ، تحدد بنقطة تقاطع آثارهما المتقاطعة . وبعد ذلك ترسم من مساقط هذه النقطة مساقط خط التقاطع حسب وضعيته الخاصة المكتسبة من الوضعية الخاصة للمستوي المتقاطع .

VI ـ٤ـ تقاطع مستقيم مع مستو في الحالة العامة :

لتحديد نقطة تقاطع مستقيم مع مستو في حالته العامة يجب اتخاذ الخطوات التالية (الشكل ١٥٩) :



شكل رقم (١٥٩)

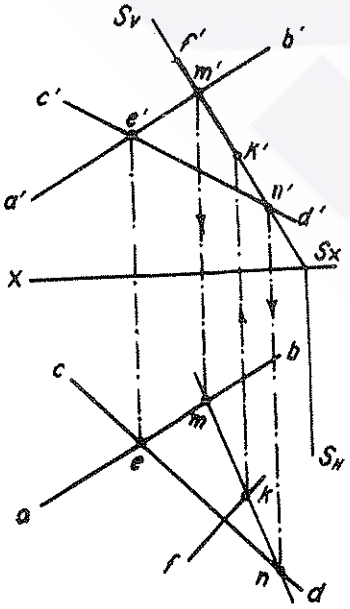
١ـ من خلال المستقيم المعني AB نمرر مستويا مساعدا S .

٢ـ نحدد خط تقاطع المستوي P مع المستوي المنشأ S والمتمثل في المستقيم MN .

٣ـ نحدد نقطة K تقاطع المستقيم AB مع خط تقاطع المستويين MN ،وهي في الوقت نفسه نقطة التقاطع المطلوبة.

هذه القواعد نطبقها على المثال الذي يوضحه الشكل (١٦٠) : لدينا المستقيم FK المتقاطع مع المستوي المحدد بالمستقيمين المتقاطعين AB و CD والمطلوب تحديد نقطة تقاطع المستقيم FK مع المستوي .

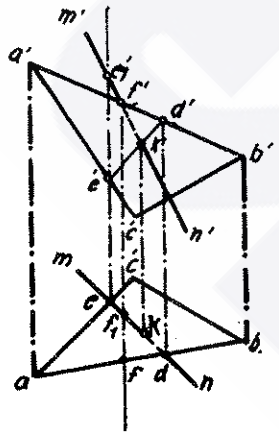
لهذا الغرض نمرر من المستقيم FK مستويا اسقاطيا أماميا S ينطبق أثره الأمامي S_V على المسقط الأمامي f'k' للمستقيم.



شكل رقم (١٦٠)

نوجد خط تقاطع المستوي S مع المستوي المحدد بالمستقيمين AB و CD بتحديد نقطتين منه ، يمكن أن تكونا نقطتي كل من المستقيمين AB و CD مع المستوي الاسقاطي S ، ويمكن تحديدهما وفق ماذكرناه في الفقرة (VI ـ٢ـ١)، فنحصل على مسقطيهما الأماميين 'm و 'n من تقاطع 'a'b و'c'd مع S_v ، وبذلك يكون المستقيم 'm'n المسقط الأمامي لخط التقاطع ، ثم نوجد المسقط الأفقي m على ab و n على cd ، ويمثل المستقيم الذي يصل بينهما mn المسقط الأفقي لخط التقاطع •

نحدد نقطة تقاطع المسقطين الأفقيين fk و mn فنحصل على النقطة k ، وهي المسقط الأفقي لنقطة تقاطع المستقيم FK مع المستوي المعني • من هذه النقطة نقيم عمودا على خط الأرض حتى يقطع 'f'k في 'k ، وهي المسقط الأمامي للنقطة المطلوبة •



شكل رقم (١٦١)

لدينا في الشكل (١٦١) مثال آخر على ايجاد نقطة تقاطع مستقيم MN مع مستو محدد بالمثلث ABC • في هذه المسألة نستخدم مستويا اسقاطيا أفقيا ولتبسيط الرسم نكتفي بالمقطع ED من أثره الأفقي (وهو المقطع الذي يتقاطع فيه مع مسقطي المستقيمين اللذين يحددان المستوي المعني ab و ac) الذي ينطبق على mn •

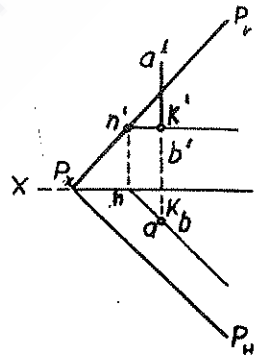
بالطريقة المتبعة في المثال السابق تتحدد مساقط نقطة التقاطع K(k و 'k) •

بالاضافة الى تحديد نقطة التقاطع K يوضح هذا المثال طريقة تمييز الأجزاء المرئية من غير المرئية من المستقيم MN واستخدام التنقط في ذلك •

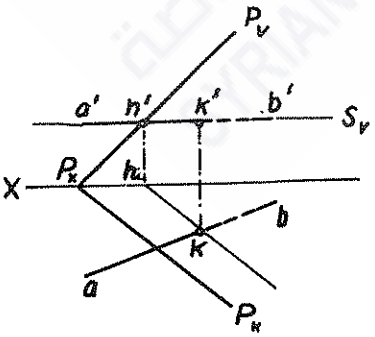
تمثل النقطة e في المسقط الأفقي على المستوي H مسقطين أفقيين متطابقين لنقطتين احداهما واقعة على المستقيم MN ومسقطها الأمامي e_1' ، والأخرى واقعة على المستقيم AC ومسقطها الأمامي e' .

من موقع المسقطين الأماميين e' و e_1' نجد أن e_1' تقع على بعد أكبر من e' عن خط الأرض وبالتالي نجد أن النقطة التي تنتمي الى المستقيم MN تغطي النقطة الثانية الواقعة على المستقيم AC وهذا يعني أن المرئي في المسقط الأفقي هو مقطع المستقيم mk . وبعد ذلك يخترق المستقيم MN مستوي المثلث ، يغطى الجزء التالي منه (أي ed) بالمثلث فهو غير مرئي ، ولذلك نرسمه منقطا .

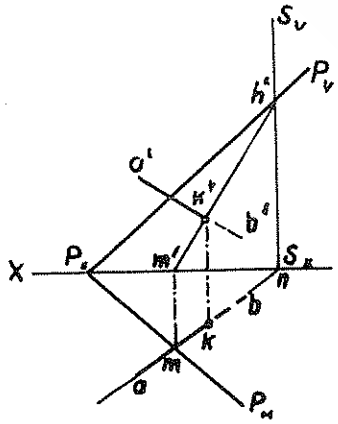
وفي المسقط الأمامي تمثل النقطة f' مسقطين أماميين متطابقين لنقطتين ، احداهما واقعة على المستقيم MN ومسقطها الأفقي f_1 والأخرى واقعة على المستقيم AB ومسقطها الأفقي f . ومن خلال الشكل المذكور يتبين لنا أن بُعد f عن خط الأرض هو الأكبر ، ولذلك نرى أن ضلع المستوي AB يكون هو المرئي ، ويغطي المستقيم MN في مقطعه f'k' فيكون هذا المقطع غير مرئي ويرسم منقطا الا أن مقطعه n'k' بعد اختراقه المستوي في النقطة k' يصبح مرئيا .



شكل رقم (١٦٢)



شكل رقم (١٦٣)



شكل رقم (١٦٤)

تقدم الأشكال (١٦٢ و ١٦٣ و ١٦٤) أمثلة على تحديد نقطة تقاطع مستقيم مع مستو في حالته العامة .

في المثال الأول (الشكل ١٦٢) يمثل المستقيم AB مستقيما اسقاطيا أفقيا ، ولهذا نجد أن المساقط الأفقية لنقاطه جميعها تتطابق في نقطة واحدة ، وأن المسقط الأفقي k لنقطة تقاطعه مع المستوي معلوم ، يقع على نفس نقطة أثره ، وأما مسقطها الأمامي k' فانه يحدد بتمرير أفق للمستوي من النقطة K .

وفي المثال الثاني (الشكل ١٦٣) يمثل المستقيم AB مستقيما أفقيا ولهذا سيكون المستوي المساعد المار منه مستويا أفقيا S .

وفي المثال الثالث (الشكل ١٦٤) نمر من المستقيم AB مستويا أفقي الاسقاط S تحدد بواسطته مساقط نقطة التقاطع K (k',k) .

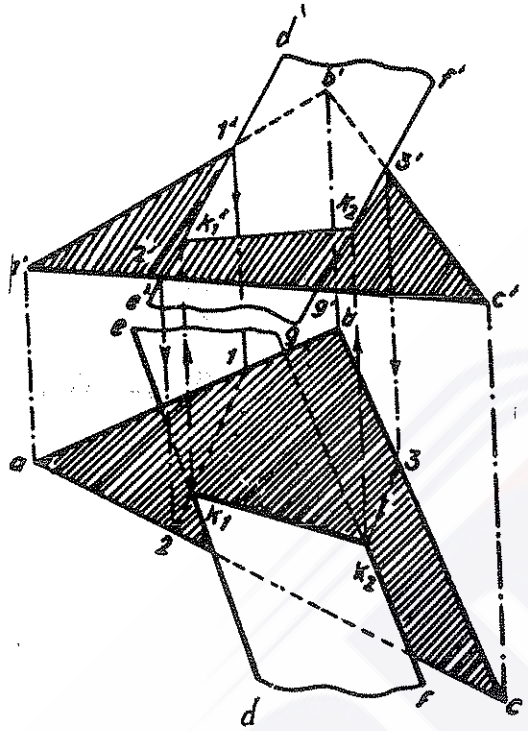
هذه الأسس يمكن أن تستخدم في تحديد خط تقاطع مستويين متقاطعين من خلال تعيين نقطتي تقاطع مستقيمين منتميين الى أحدهما مع المستوي الثاني ، فنحصل على نقطتين من خط تقاطعهما . واذا رجعنا الى الشكل (١٥٣) في الفقرة (VI ـ٣) نجد أننا استخدمنا فعلا هذه الطريقة في تحديد خط تقاطع المستوي المساعد T_1 مع كل من المستويين P و Q ملاحظين أن المستوي T_1 في حالة خاصة (مستوي اسقاطي أمامي).

وفي الحالة العامة لكلا المستويين يمكن توضيح ذلك في المثال الذي يوضحه الشكل (١٦٥) : لدينا مستو محدد بالمثلث ABC يتقاطع مع مستو محدد بمستقيمين متوازيين DE // FG .

ان حل هذه المسألة يتم من خلال تحديد النقطتين K_1 و K_2 اللتين تمثلان نقطتي تقاطع المستقيمين DE و FG على التوالي مع مستوي المثلث

ABC وحين نمرر مستقيما من هاتين النقطتين نحصل على خط التقاطع K_1K_2 للمستويين .

حصلنا على النقطتين K_1 و K_2 من حلال افتراض أننا مررنا من المستقيمين DE و FG مستويين اسقاطيين أماميين . من المستوي الأول نحصل أولا على المسقط الأمامي '1'2 لخط تقاطعه مع مستوي المثلث ABC ، ومن ثم نوجد 2 1 في المسقط الأفقي الذي يقطع المستقيم DE في النقطة k_1 ، وهي المسقط الأفقي لنقطة تقاطعه مع المستوي ABC بعد ذلك



شكل رقم (١٦٥)

نحدد مسقطها الأمامي k'_1 على المستقيم 'd'e . وبالنسبة للمستوي الثاني يكفي أن نحدد نقطة واحدة هي '3 3 ، ونرسم من 3 مستقيما موازيا للمستقيم 2 1 يقطع fg في نقطة k_2 ومن ثم نحدد k'_2 على المستقيم المرسوم من '3 موازيا للمستقيم '2 '1 . (لاحظ التنقيط وتأكد من صحته).

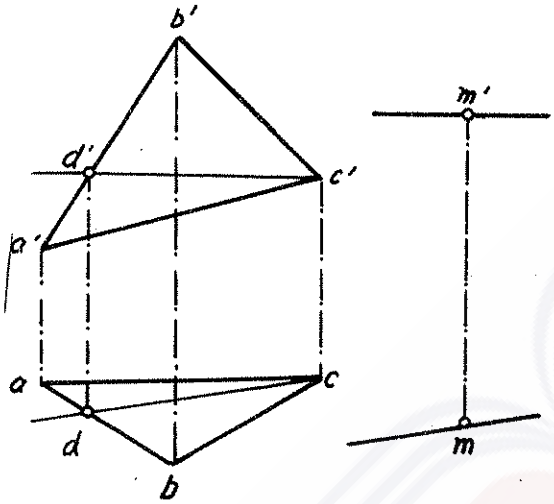
VI ـ ٥ ـ توازي مستقيم ومستو :

من الهندسة المستوية عرفنا أن المستقيم AB الموازي للمستقيم MN الواقع في المستوي Q يوازي المستوي نفسه ، وعرفنا أيضا أن من الممكن أن نرسم من نقطة معلومة في الفراغ مجموعة لانهائية من المستقيمات

الموازية لمستو معين • فللحصول على حل وحيد لابد أن تتوفر شروط اضافية •

مثال ١ :

من النقطة M مرر مستقيما أفقيا موازيا للمستوي المحدد بالمثلث ABC (الشكل ١٦٦) •



شكل رقم (١٦٦)

الحل :

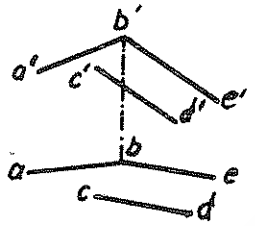
لما كان المستقيم المطلوب أفقيا فهو يوازي مستوي الاسقاط الأفقي H ، أي أنه يوازي المستويين ABC و H في آن معا ، ولذلك يوازي خط تقاطعهما ، وبكلمة أخرى نقول : يوازي الأثر الأفقي للمستوي ABC • لتحديد اتجاه هذا الأثر يمكن استخدام مستقيم أفق المستوي ABC • ولذلك نرسم من النقطة 'c مستقيما أفقيا ، ليقطع 'a'b في نقطة 'd فيكون 'c'd المسقط الأمامي لأفق المستوي المطلوب ، ثم نوجد المسقط الأفقي d على ab ،ونوصل بينه وبين c ، فنحصل بذلك على cd المسقط الأفقي لأفق المستوي • نرسم الآن من 'm مستقيما أفقيا ، أي موازيا لـ 'c'd ، فيمثل المسقط الأمامي للمستقيم المطلوب ، ونرسم من m مستقيما موازيا لـ cd فنحصل على المسقط الأفقي لهذا المستقيم •

لندرس المسألة العكسية : المطلوب أن نرسم من نقطة محددة خارج مستقيم مستويا موازيا لهذا المستقيم • وفي هذه الحالة أيضا يمكن أن نرسم من هذه النقطة مجموعة لانهائية من المستويات الموازية لهذا المستقيم ، تتقاطع بمستقيم يوازي المستقيم المعني ، فللحصول على حل وحيد للمسألة

لابد أن توفر شروط اضافية أخرى ٠

مثـــال ٢ :

من المستقيم AB مرر مستويا موازيا للمستقيم CD (الشكل ١٦٧) ٠



شكل رقم (١٦٧)

الحـــل :

اذا كان المستقيمان AB و CD متوازيين فان الحل يكون مجموعة لانهائيـــة مـــن المستويات ، فهو يحتاج الى شروط اضافية حتى يتخذ صيغة وحيدة ٠ وأما اذا كان المستقيمان متخالفين فان الحل يكون وحيدا ٠ في مثالنا هذا يتضـــح أن المستقيمين متخالفان ولذلك يكفي أن نرسم من النقطة B مستقيما BE موازيا للمستقيم CD ، وبهذا يكون المستوي المحدد بالمستقيمين المتقاطعين AB و BE موازيا للمستقيم CD ٠

لاثبات موازاة مستقيم لمستو ما يجب البرهنة على موازاة هذا المستقيم لمستقيم واحد على الأقل ، ينتمي الى المستوي المعني ٠

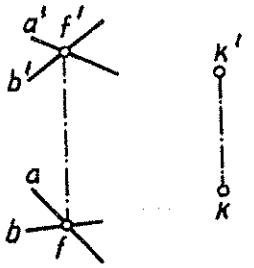
VI ـ٦ـ توازي المســـتويات :

ذكرنا في بداية هذا الفصل أن الشرط الأساسي لتوازي مستويين هو وجود مستقيمين متقاطعين في أحدهما ، يوازيان مستقيمين متقاطعين في الآخـــر ٠ وانطلاقا من هذه القاعدة يمكن تحديد طريقة رسم مثل هذه المستويات ٠

مثـــال ١ :

المطلوب أن نمرر مستويا موازيا للمستوي المحدد بالمستقيميـــــ

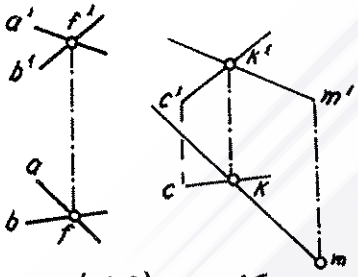
المتقاطعين AF و BF من النقطة K (الشكل ١٦٨) .



شكل رقم (١٦٨)

الحـــــل :

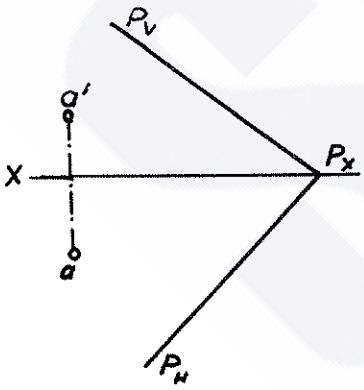
لحل هذا المثال نمرر ، كما هو واضح في الشكل (١٦٩) مستقيمين متقاطعين MK و CK من النقطة K بحيث يكون MK // AF و CK // BF ، وبذلك نحصل على مستـــو محدد بالمستقيمين MK و CK يوازي المستوي المحدد بالمستقيمين AF و BF .



شكل رقم (١٦٩)

مثـــال ٢ :

مرر من النقطة A (الشكل ١٧٠) مستويا موازيا للمستوي P المحدد بآثاره.

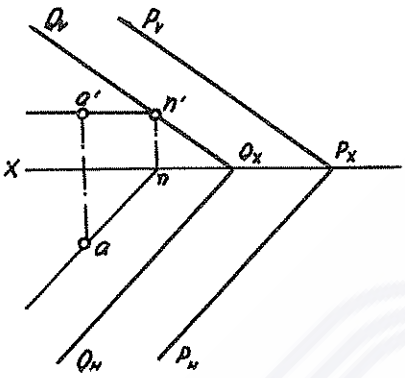


شكل رقم (١٧٠)

الحـــــل :

ان آثر المستوي P_h و P_v ـ كمـــا أوضحنا في الفقرة (VI ـ١) من هـــــذا الفصل ـ يمكن أن تُعد مستقيمات متقاطعة في نقطة P_x تنتمي الى المستوي.فلتحديد المستوي المطلوب يجب علينا أن نحدد مستقيمين متقاطعين فيه يوازيان P_v و P_h ، ويمكن لهذين المستقيمين أن يتمثلا بأثري المستوي المطلـــوب Q_v و Q_h . لرسم هذين الأثرين نحدد نقطة واحدة لكل منهما ، لأن اتجاهيهمـــا معروفان (موازيان P_v و P_h) ولتحديد ذلك نمرر من النقطـــــة A

(الشكل ١٧١) مستقيما أفقيا AN ، مسقطه الأمامي يوازي خط الأرض ولهذا نمرر من 'a مستقيما موازيا لخط الأرض ٠ وأما مسقطه الأفقي فسيوازي Q_h ، وبالتالي يوازي P_h ٠ فمن النقطة a نرسم مستقيما يوازي P_h ، فيقطع خط الأرض في النقطة n التي تمثل المسقط الأفقي لأثر المستقيم الأمامي ٠ نوجد مسقطه الأمامي 'n



شكل رقم (١٧١)

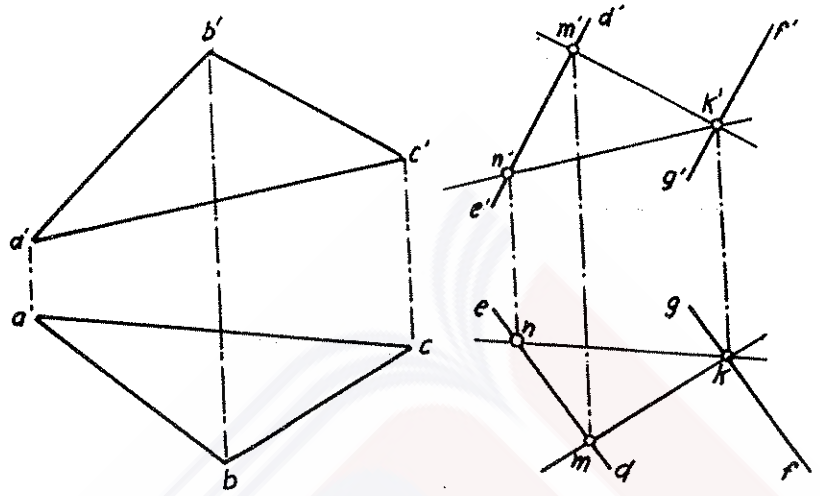
على مسقط المستقيم الأمامي ٠ ان أثر المستقيم الذي ينتمي الى مستو يقع ـ كما هو معروف في الفصل السابق ـ على الأثر الذي يماثله للمستوي ، وبذلك تكون النقطة 'n هي احدى نقاط Q_v ، وبناء على ذلك نرسم من هذه النقطة مستقيما يوازي P_v فنحصل على Q_v الذي يقطع خط الأرض في النقطة Q_x التي تمثل في الوقت نفسه احدى نقاط الأثر الأفقي ٠ ولهذا نرسم من Q_x مستقيما يوازي P_h فنحصل على الأثر الأفقي للمستوي المطلوب Q_h ٠

مثال ٣ :

لدينا مستويان : P محدد بالمثلث ABC و Q بالمستقيمين المتوازيين DE و FG (الشكل ١٧٢) ما العلاقة المتبادلة بين المستويين؟

الحل :

ان العلاقة بين مستويين تتحدد ـ كما ذكرنا سابقا ـ باحدى حالتين : اما أن يكونا متوازيين أو متقاطعين ٠ فاذا افترضنا أنهما متقاطعان يجب البحث عن خط تقاطعهما ، واذا كانا متوازيين يجب البحث عن مستقيمين



شكل رقم (١٧٢)

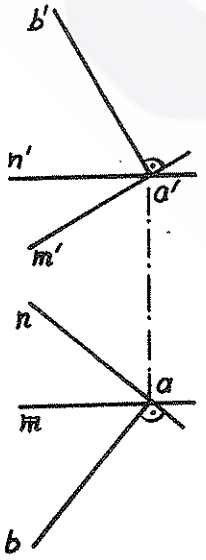
متلاقيين (متقاطعين) في أحد المستويين موازيين لمستقيمين متقاطعين في المستوي الآخر .

للتحقق من الحالة الأولى (التقاطع) نحتاج الى عمليات أكثر وأعقد مما تتطلبه الحالة الثانية ، وبشكل خاص عندما يكون أحد المستويين محددا بشكل هندسي معين (مثلا : المثلث) ، أي بمستقيمات متقاطعة . ولذلك نتحقق من توازي المستويين ، فنحتاج الى ايجاد مستقيمين متقاطعين في المستوي الثاني Q موازيين لضلعين من أضلاع المثلث ABC المحدد للمستوي P . ولذلك نحدد نقطة K على المستقيم FG ، ومنها نحاول أن نرسم مستقيمين متقاطعين موازيين لضلعين من المثلث ABC ، ولهذا الغرض نرسم من مسقطها الأمامي k' (أو مسقطها الأفقي k) مستقيمين k'm' و k'n' موازيين للمستقيمين b'c' و a'c' وحتى يكون المستقيم في المستوي لابد أن تنتمي نقطتان منه الى المستوي ، ولهذا يجب حتى يكون المستقيمان KM و KN منتميين الى المستوي Q أن يقع مسقطا النقطتين

M و N الأفقيين m و n على المسقط الأفقي de للمستقيم DE ٠ وحتى يكون المستقيمان متوازيين لابد أن تكون مساقطها المتماثلة متوازية أيضا ، ولهذا اذا كان المستقيمان KM و KN يوازيان المستقيمين BC و AC على التوالي فان مسقطيهما الأفقيين يجب أن يكونا متوازيين أيضا ٠ ومن خلال الشكل (١٧٢) نلاحظ أن المسقطين الأفقيين km و kn الناتجين عن الربط بين النقاط k و m و n الواقعة على المسقطين الأفقيين dg و de للمستقيمين اللذين يحددان المستوي Q يوازيان bc و ac على التوالي ، ولذلك نجد أن المستويين P و Q متوازيان ٠

VI ـ٧ـ التعامد المتبادل بين مستقيم ومستو :

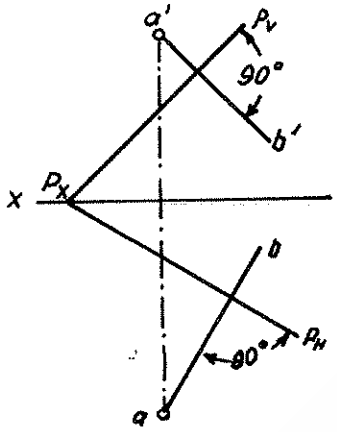
يمكن أن يعد التعامد حالة خاصة من حالات التقاطع ، ندرس خصائص اسقاطها من خلال الشكلين (١٧٣ و ١٧٤)٠



شكل رقم (١٧٣)

لدينا في الشكل (١٧٣) مستو محدد بمستقيمين: أحدهما AN أفقي والآخر أمامي AM ٠ ولدينا فيه المستقيم AB عموديا على كل من المستقيمين المذكورين ، وذلك حسب قواعد اسقاط الزاوية القائمة ٠ فهو ـ أي المستقيم AB ـ عمودي على المستوي المحدد بالمستقيمين AN و AM ٠ولدينا في الشكل (١٧٤) المستوي P المحدد بآثاره P_v و P_h والمستقيم AB العمودي على المستوي، ولذا نجد أن مسقطه الأمامي a'b' عمودي على P_v وأن مسقطه الأفقي ab عمودي P_h ، ويمكن أن يُعد

P_v مستقيما أماميا و P_h مستقيما أفقيا للمستوي ٠



شكل رقم (١٧٤)

حسب بديهيات التعامد نـــرى أن أي مستقيم عمودي على مستو يعامد أي مستقيم ينتمي الى المستوي ومن أجل أن يكون مسقط المستقيم العمودي على مستو في حالتـــه العامة عموديا على المسقط الذي يشابهـــه لمستقيم ينتمي الى هذا المستوي لابـــد أن يكون هذا المستقيم أحد المستقيمات الخاصة للمستوي (أفق المستوي ، أو جبهة المستوي ، أو جانب المستوي) ٠ ولهذا عند التعبير الاسقاطي عن المستقيمات المتعامدة مع مستو في الحالة العـامة يؤخذ مستقيمان من هذه المستقيمات الخاصة (أفق المستوي وجبهته كما هـو واضح في الشكل ١٧٣) ٠ وفي ضوء ذلك يمكن أن تصاغ قاعدة تعامد مستقيـم مع مستو على النحو التالي : ((العمودي على مستو يكون مسقطه الأفـــقي عموديا على المسقط الأفقي لأفق المستوي ويكن مسقطه الأمامي عموديا عـــلى المسقط الأمامي لجبهة المستوي ويكون مسقطه الجانبي عموديا على المسقـــط الجانبي لجانب المستوي)) ٠

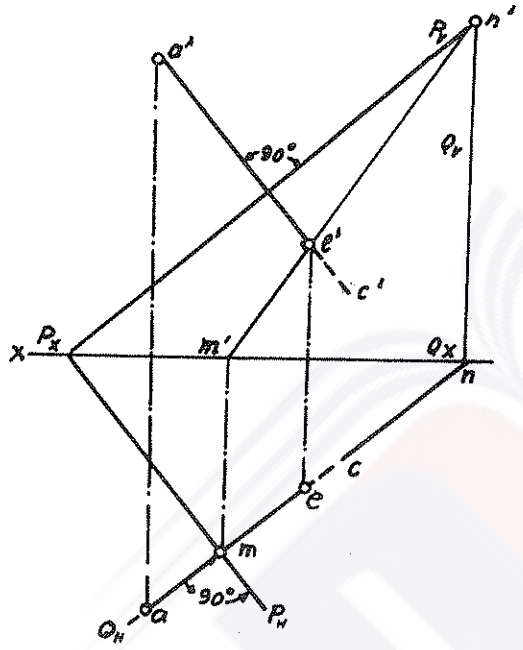
وفي حالة المستوي الذي تعبر عنه آثاره نجد أن القاعدة السابقة تبـقى صحيحة ولما كان الأثر الأمامي يمثل جبهة للمستوي المنطبق على مستـــوي الاسقاط الأمامي ، والأثر الأفقي يمثل أفق المستوي المنطبق على مستـــوي الاسقاط الأفقي ، فان القاعدة السابقة يمكن أن نعبر عنها بالصيغة التاليـة :

((اذا كان المستقيم عموديا على مستو فان مساقطه تكون عموديـــة على

مستقيما عموديا على أثـــره P_h ٠

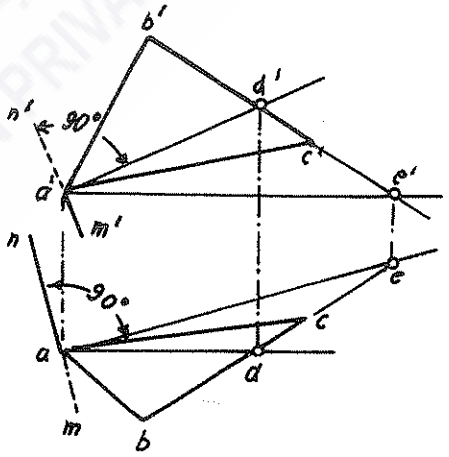
هذا المستقيمان يمثلان المسقـــط الأمامي a'c' والمسقط الأفقي ac للعمود المطلوب AC ٠

لتحديد نقطة تقاطع العمود AC مع المستوي الذي يعامده P نمـــرر من AC مستويا مساعدا اسقاطيـــا أفقيا Q (عموديا على المستـــوي H) ، ونحدد خط تقاطعه MN مع المستوي P ، وهنا نجد أن نقطـــة E تمثل نقطة تقاطع المستقيميـــن AC و MN وأنها تمثل النقطـــة المطلوبة ٠



شكل رقم (١٧٦)

مثـــال ٢ : المطلوب ان نقيم عمودا من النقطة A على المستوي المحـــدد بالمثلث ABC (الشكل ١٧٧) ٠



شكل رقم (١٧٧)

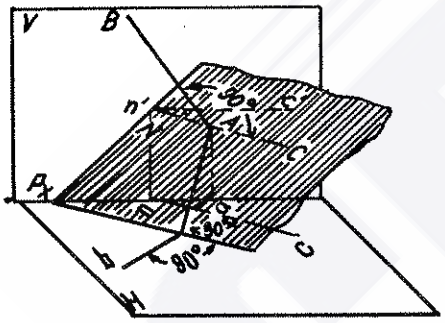
الحـــل : في هذا المثال سنحاول أن نصل الى الحل دون أن نعمل على ايجاد آثـــار المستوي واستخدام الطريقة المتبعـــة في المثال الأول ، بل سنعمل من خـــلال استخدام القاعدة الأساسية ٠ من خـــلال الشكل المذكور يتضح لدينا أن المستـــوي في حالته العامة ، ولهذا يكفي استخدام

آثار المستوي المماثلة)) .

ان القاعدة العكسية صحيحة أيضا ، أي : ((اذا كانت مساقط مستقيم عمودية على آثار المستوي المماثلة فان المستقيم عمودي على المستوي نفسه)).

يمكن أن نكتفي بالتعبير الاسقاطي الثنائي في جميع حالات المستوي ماعدا الحالة التي يكون فيها المستوي الذي يعامد المستقيم مستويا اسقاطيا جانبيا ، فيجب حينئذ أن نستخدم التعبير الاسقاطي الثلاثي ، لأن التعبير الاسقاطي الثنائي يعطي في بعض الحالات انطباعا بأن المستقيم والمستوي الاسقاطي الجانبي متعامدان في الوقت الذي يكون وضعهما المتبادل غير ذلك .

من جهة أخرى لابد أن نشير الى أن المسقط الأفقي للمستقيم العمودي على المستوي يتطابق مع المسقط الأفقي لمستقيم الميل الأكبر للمستوي المار من نقطة التعامد كما هو موضح في الشكل (١٧٥) .



شكل رقم (١٧٥)

مثـــال ١ :

المطلوب أن نقيم من النقطة A عمودا على المستوي P المحدد بآثاره ثم نحدد نقطة تقاطعهما (الشكل ١٧٦) .

الحـــل :

حسب قاعدة التعامد التي أشرنا اليها سابقا نجد أن مساقط العمود تعامد الاثار المماثلة للمستوي المتعامد معه ولهذا يكفي لحل الجزء الأول أن نرسم مستقيما عموديا من نقطة a' على أثر المستوي P_V ونرسم من a

التعبير الاسقاطي الثنائي .

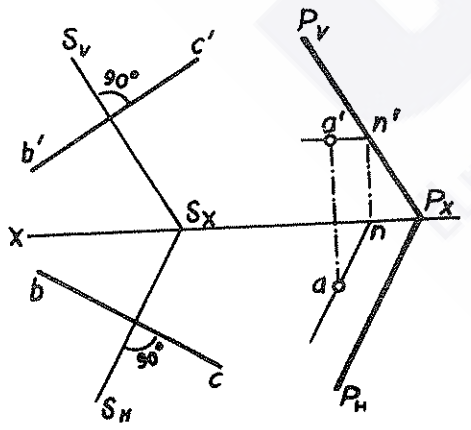
لتحديد العمود المطلوب يكفي أن نحدد مساقطه ، ولهذا الغرض نمرر من النقطة A مستقيمين منتميين الى المستوي : الأول أفق المستوي والآخر جبهته . ولذلك نرسم من النقطة 'a مستقيما أفقيا ، فيقطع امتداد 'b'c في نقطة 'e ، ويمثل 'a'e المسقط الأمامي لأفق المستوي نوجد المسقط الأفقي e للنقطة E على امتداد bc ، ونصل بين e و a ، فنحصل على المسقط الأفقي لأفق المستوي . ونمرر الآن من النقطة a مستقيما أفقيا يمثل المسقط الأفقي لجبهة المستوي ، فيقطع bc في النقطة d ، ونوجد مسقطها الأمامي 'd على 'b'c ، فنحصل على المسقط الأمامي 'a'd لجبهة المستوي.

من النقطة a نقيم عمودا mn على ac ومن النقطة 'a نقيم عمودا 'm'n على 'a'd وبذلك يكون المستقيم MN ـ حسب القاعدة العكسية للتعامد ـ متعامدا مع المستوي المحدد .

مثال ٣ : المطلوب أن نمرر مستويا من النقطة A عموديا على المستقيم BC ، (الشكلان ١٧٨ و ١٧٩) .

الحل ـ الطريقة الأولى :

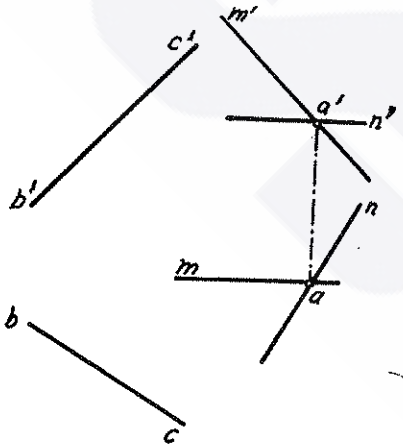
يمكن التعبير عن المستوي المطلوب بآثاره . ولهذا تعامد مساقط المستقيم ـ حسب قاعدة التعامد ـ الآثار المماثلة للمستوي المتعامد معه . لذلك نمرر من نقطة كيفية من المستقيم BC



شكل رقم (١٧٨)

مستويا مساعدا S عموديا على المستقيم (الشكل ١٧٨) فيكون أثره الأمامي S_v عموديا على المسقط الأمامي للمستقيم b'c' ويكون أثره الأفقي S_h عموديا على المسقط الأفقي للمستقيم bc • المستوي المطلوب يوازي المستوي S (من بديهيات التعامد) ، ولهذا نمرر من النقطة A أفقا للمستوي المطلوب فيكون مسقطه الأفقي موازيا لـ S_h (من بديهيات التوازي) • ولذلك نمرر من a مستقيما an يوازي S_h ، فيقطع خط الأرض في النقطة n التي تمثل المسقط الأفقي للأثر الأمامي لأفق المستوي والواقع على المسقط الأمامي a'n' لهذا الأفق • وهذا الأثر يقع على الأثر الأمامي P_v للمستوي المطلوب P • ولذلك نرسم من النقطة n' مستقيما يوازي S_v فنحصل على P_v الذي يقطع خط الأرض في نقطة P_x التي تكون في الوقت نفسه احدى نقاط الأثر الأفقي P_h للمستوي المطلوب • ولهذا نرسم من P_x مستقيما يوازي S_h فنحصل على الأثر الأفقي للمستوي المطلوب P •

الطريقة الثانية :



شكل رقم (١٧٩)

في هذه الطريقة نتوصل الى الحل دون اللجوء الى آثار المستوي المطلوب بل نتوصل الى ذلك من خلال التعبير عن هذا المستوي بمستقيمين واقعين عليه • ولذلك نمرر ـ حسب قاعدة تعامد مستقيم مع مستو ـ من النقطة A مستقيمين : الأول يمثل أفق المستوي المطلوب AN والثاني يمثل جبهته AM • ولهذا الغرض نمرر من النقطة a مستقيما an عموديا على bc ، يمثل المسقط الأفقي لأفق المستوي ، ونمرر مستقيما آخر أفقيا

am ، يمثل المسقط الأفقي لجبهة المستوي ، ونمرر من النقطة a' مستقيما a'm' عموديا على b'c' ، يمثل المسقط الأمامي لجبهة المستوي ونمرر آخر a'n' أفقيا يمثل المسقط الأمامي لأفق المستوي ، وبهذا نحقق قاعدة التعامد ، ونحصل على المستوي P الذي يحدد بالمستقيمين المتقاطعين AM و AN ويعامد المستقيم BC ويمر من النقطة A ، كما هو موضح في الشكل (١٧٩) .

IV -٧-١- تعامد مستقيمين :

يمكن استخدام القواعد المذكورة سابقا في تحديد (رسم) التعبير الاسقاطي لمستقيمين متعامدين . لقد ذكرنا سابقا ضمن قواعد التعامد وبديهياته أن المستقيم العمودي على مستو يكون عموديا على جميع المستقيمات الواقعة في هذا المستوي .

لنفترض أن المطلوب هو انزال مستقيم من النقطة A عمودي على المستقيم BC . ان حل هذه المسألة وتحديد مساقط المستقيم المطلوب يتم وفق الخطوات العامة التالية :

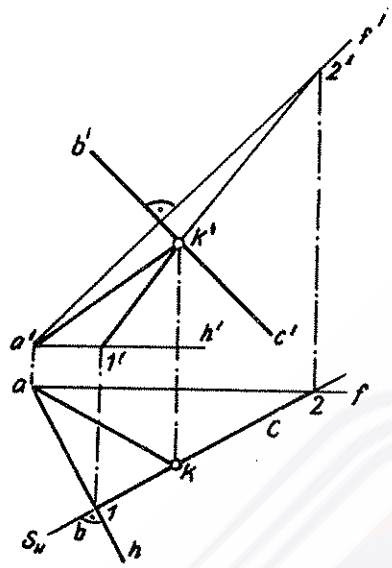
١- من النقطة A نمرر مستويا Q عموديا على المستقيم BC .

٢- نحدد نقطة K تقاطع المستقيم BC مع المستوي Q .

٣- نوصل بين النقطتين A و K بمقطع مستقيم . المستقيمان AK و BC متعامدان .

ان الشكل (١٨٠) يوضح لنا مثالا لتحديد مثل هذه المستقيمات . ففي هذا الشكل مررنا من خلال النقطة A المستوي Q العمودي على المستقيم BC . وقد تم ذلك من خلال استخدام جبهة المستوي وأفقه . وحسب قواعد

التعامد التي ذكرناها في هذه الفقرة يكون المسقط الأمامي b'c' للمستقيم عموديا على المسقط الأمامي a'f' لجبهة المستوي ولهذا يمكننا بسهولة أن نرسم من a' المستقيم a'f' عموديا على b'c' • وفي الوقت نفسه يكون المسقط الأفقي bc للمستقيم عموديا على المسقط الأفقي ah لأفق المستوي فمن النقطة a نرسم المستقيم ah عموديا على bc •



شكل رقم (١٨٠)

ولايجاد نقطة تعامد (تقاطع) المستقيم BC مع المستوي Q نمرر مستويا اسقاطيا أفقيا S من خلال المستقيم BC (الشكل ١٨٠ يعبر عن المستوي S بأثره الأفقي S_h) هذا المستوي يتقاطع مع المستوي Q المار من النقطة A بخط التقاطع الذي تعبر عنه مساقطه 2 - 1 و '2-'1 • ان تقاطع هذا المستقيم مع المستقيم BC يعطينا النقطة K ، وان وصل A بـ K يجعلنا نحصل على المستقيم AK الذي يعامد BC (من بديهيات التعامد) ، وهو المطلوب •

VI ـ٨ـ تحديد المستويات المتعامدة :

ان تحديد المستويات المتعامدة والتعبير عنها اسقاطيا يتم باحدى الطريقتين التاليتين :

١ـ نمرر المستوي الأول (وليكن Q) من مستقيم عمودي على المستوي

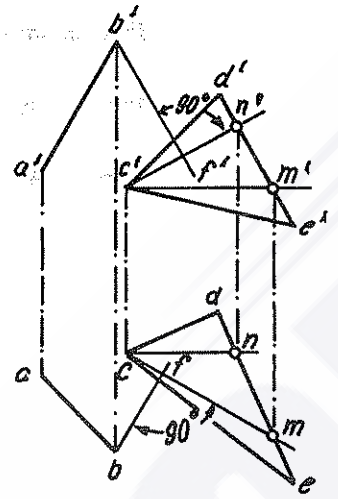
الثاني (وليكن P) .

٢ـ نمرر المستوي Q بحيث يعامد مستقيما واقعا في المستوي P أو يعامد مستقيما موازيا لهذا المستوي . وللحصول على حل وحيد لهذه الطريقة لابد أن تتوفر شروط اضافية .

مثال ١ :

مرر من المستقيم AB مستويا عموديا على المستوي المحدد بالمثلث CDE .

الحل :



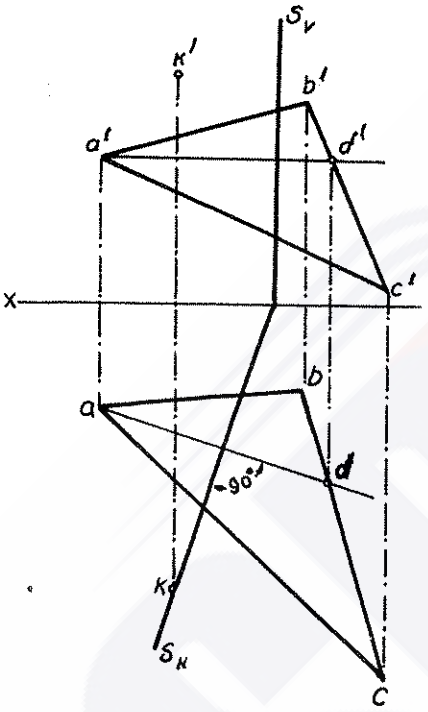
شكل رقم (١٨١)

اذا استخدمنا الطريقة الأولى (الشكل ١٨١) فسيكفينا أن نقيم عمودا على المثلث CDE من أية نقطة على المستقيم AB . وحسب شروط التعامد التي ذكرناها في الفقرة السابقة نجد أن المسقط الأمامي لهذا المستقيم يعامد المسقط الأمامي لجبهة المستوي وأن مسقطه الأفقي يعامد المسقط الأفقي لأفق المستوي. ولهذا نرسم من النقطة C مستقيما أفقيا يمثل المسقط الأفقي cn لجبهة المستوي ، ومن ثم نحدد 'n ونوصل بين 'n و 'c فنحصل على 'c'n المسقط الأمامي لجبهة المستوي ومن نقطة 'b نرسم المستقيم'b'f عموديا على 'c'n . وبعد ذلك نرسم من النقطة 'c مستقيما أفقيا يمثل المسقط الأمامي 'c'm لأفق المستوي ، ومن ثم نحدد m ونوصل c و m فنحصل على المسقط الأفقي cm لأفق المستوي ومن نقطة b نرسم المستقيم bf عموديا على cm . وبذلك نحصل على المستقيم BF العمودي على المستوي

المحدد بالمثلث CDE • ولهذا نجد أن المستقيمين AB و BF يحددان المستوي المطلوب •

مثـــال ٢ :

مرر من النقطة K (الشكل ١٨٢) مستويا يعامد مستوي الاسقاط الأفقي H والمستوي المحدد بالمثلث ABC في آن معا •



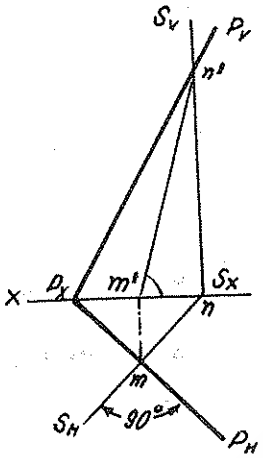
شكل رقم (١٨٢)

الحـــل :

من الواضح أن المستوي المطلوب هو مستوي اسقاطي أفقي • ولذلك نرسم أفق المستوي AD للمستوي المحدد بالمثلث ABC ومن نقطة K نمرر مستويا اسقاطيا أفقيا عمودي على AD ، وذلك برسم أثره الأفقي S_h المار من المسقط الأفقي للنقطة K عموديا على المسقط الأفقي cd لأفق المستوي ، ومن ثم نرسم أثره الأمامي S_V عموديا على خط الأرض • هذا المستوي الذي يعامد مستقيما ينتمي الى المستوي المحدد بالمثلث ABC يكون عموديا على المستوي ABC نفسه •

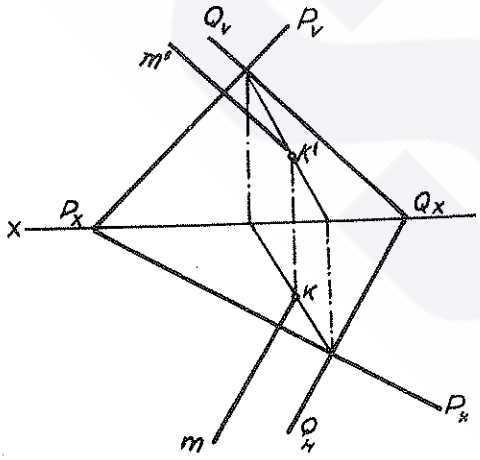
ولندرس الآن الأوضاع المتبادلة لآثار المستويات المتعامدة وندرس كذلك الأوضاع المتبادلة للمستويات المتعامدة آثارها • في الشكل (١٨٣) المستوي الاسقاطي الأفقي S يعامد المستوي P في الحالة العامة • ولما كان $S \perp H$ و $P \perp S$ فان $P_h \perp S$ ، وهذا

يعني $P_h \perp S_h$ وبالعكس نقول : اذا كان $P_h \perp S_h$ و $S \perp H$ فان $P_h \perp S$ أو $S \perp P_h$ وهـــــذا يعني أن $S \perp P$.



شكل رقم (١٨٣)

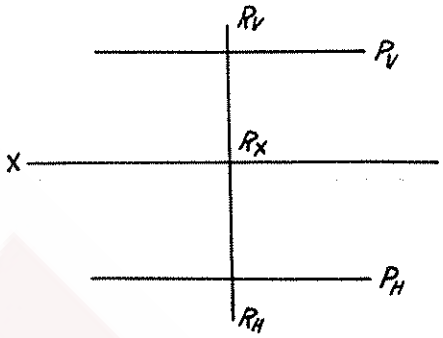
ان هذا الاستنتاج يوصلنا الى قاعدة عامة تقول : ((اذا كان أحد المستويين المتعامدين (أو كلاهما) مستويا اسقاطيا فان آثارهما في مستوي الاسقـــــاط المعني متعامدة ، أي : اذا كان أحد المستوييـــــن اسقاطيا أفقيا فان آثارهما الأفقية متعامدة ،واذا كان أحدهما مستويا اسقاطيا أماميا فان آثارهما الأمامية متعامدة ، ... وهكذا)) . أما القاعدة العكسيـــــة فهي تقول : ((اذا تعامد أثرا مستويين وكان أحد المستويين اسقاطيـــا على مستوي الاسقاط المعني فان المستويين متعامدان)) .



شكل رقم (١٨٤)

وأما اذا كان المستويان في الحالـــة العامة فان تعامد الأثار المتناظرة لايعني بالضرورة أن يعامد المستويين نفسيهما . لدينا في الشكل (١٨٤) المستويـــان P و Q ، آثارهما المتماثلة متعامدة ، أي : P_h و Q_h ، P_v و Q_v ، لكـــــن المستويين غير متعامدين ، ولاثبات ذلـــك نحدد خط تقاطعهما ، ونقيم من نقطة مـــا عليه (مثلا النقطة K) مستقيما MK عموديا على أحد المستويين وليكـــن المستوي P . فاذا كان المستويان P و Q متعامدين فان المستقيـم MK

يجب أن يقع في المستوي Q ، وهذا يعني أن آثاره يجب أن تقع على آثار المستوي Q التي تماثلها ، الا أن ذلك ـ كما هو واضح من الشكل ـ غير ممكن ، لأن Q_h // mk و Q_v // m'k' • لدينا في الشكل (١٨٥) حالة تطابق تعامد الآثار المتماثلة مع تعامد المستويات ذاتها • الا أن هذه المستويات ليست في حالتها العامة بل في أوضاع خاصة ، فالمستوي P اسقاطي جانبي يوازي خط الأرض والمستوي R جانبي (مستوي تطابق جانبي) ـ ولذلك تعامد الآثار بعضها بعضا $R_v \perp P_v$ و $R_h \perp P_h$ في الوقت نفسه •

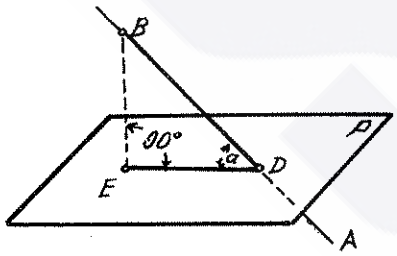


شكل رقم (١٨٥)

VI ـ٩ـ اسقاط زاوية بين مستقيم ومستو :

اذا كان المستقيم المتقاطع مع مستو لايعامده فانه يصنع معه زاوية تمثل الزاوية المحصورة بين المستقيم نفسه ومسقطه على هذا المستوي •

(اسقاط الزاوية المحصورة بين المستقيم ومستويات الاسقاط راجع الفصل الرابع ، الفقرة IV ـ٢) •



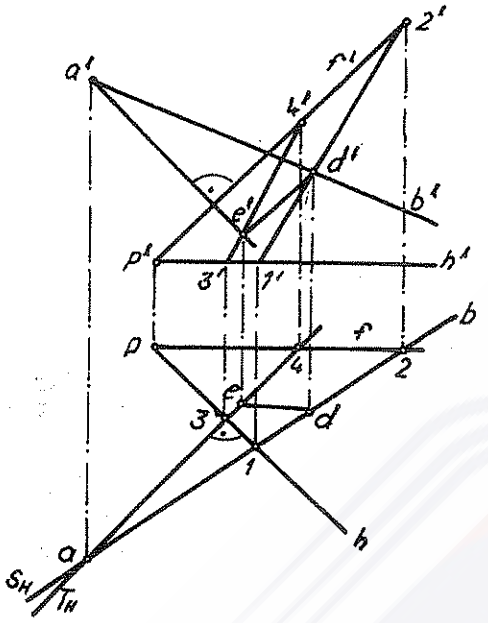
شكل رقم (١٨٦)

اذا قطع المستقيم AB المستوي P الشكل (١٨٦) في النقطة D ، فان الزاوية التي ينصعها مع هذا المستوي تمثلها الزاوية α المحصورة بين

المستقيم نفسه ومسقطه ED على هـذا المستوي .

ولتحديد مساقط الزاوية بين المستقيم A B ومستو ما P نتبع الخطـوات التالية التي يوضحها الشكل (١٨٧):

لدينا المستقيم AB المعبـر عنه بمسقطيه والمستوي المتقاطـع معه والمعبر عنه بأفقـه PH وجبهته PF :



شكل رقم (١٨٧)

١ـ نحدد نقطة تقاطع المستقيم AB والمستوي P ، وهي النقطة D ، حين نمرر مستويا اسقاطيا أفقيـا مساعدا S من المستقيم AB .

٢ـ نقيم من النقطة A عمودا على المستوي P .

٣ـ نوجد نقطة تقاطع هذا العمود مع المستوي P ، وهي النقطة E ،حين نمرر مستويا اسقاطيا أفقيا مساعدا من هذا العمود .

٤ـ نصل بين النقاط d و e ، 'd و 'e ، فنحصل على مساقـط المستقيم AB على المستوي P .

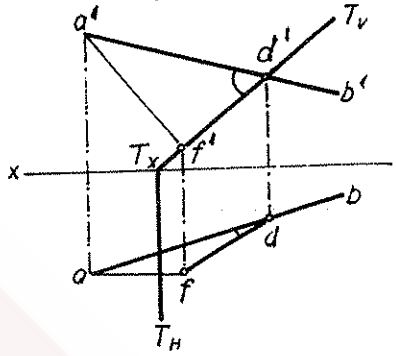
٥ـ تمثل الزاوية 'a'd'e المسقط الأمامي للزاوية بين المستقيـم AB والمستوي P .

٦ـ تمثل الزاوية ade المسقط الأفقي لهذه الزاوية .

اذا كان المستوي في احدى الحالات الخاصة فان تحديد مساقط الزاويـة المعنية يبسط كثيرا ، اذ أن تحديـد نقطة تقاطع المستقيم معـه

لايحتاج الى مستويات مساعـــــــــدة .

مثلا : في الشكل (١٨٨) يصنع المستقيم AB زاوية مع المستوي الاســقاطي الأمـامي T ، مساقطها تحدد بالطريقة السـابقة نفسـها ، ولما كان المستوي T ذاته اسـقاطيا فان الحاجة الى مثل هذا المستوي في تحـديـد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المســتوي ، وهي النقطة D ، لاتغدو ضرورية وعلى هذا الأساس فان مسقطي الزاوية بيـــن المستقيم AB والمستوي T هما : المسقط الأفقي adf والمسقط الأمامي a'd'f' .

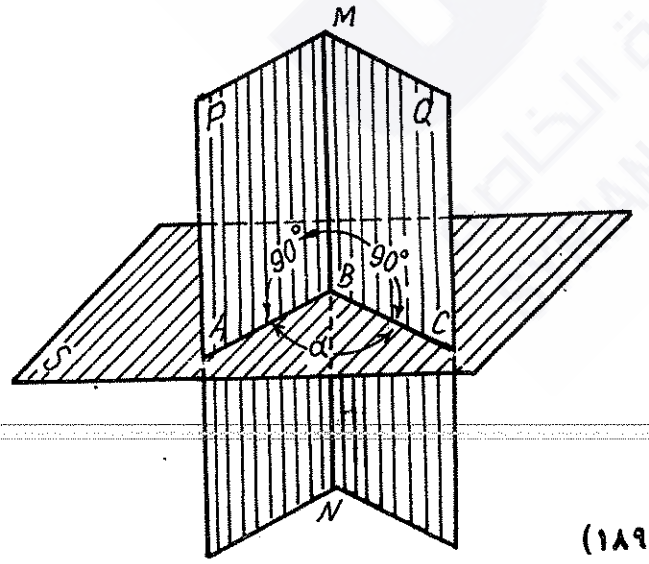


شكل رقم (١٨٨)

VI ـ١٠ـ تحديد مساقط زاوية بين مستويين :

عند تقاطع مستويين يصنعان بينهما أربع زوايا ثنائية السطوح نكتـــفي بدراســـة احدى الزوايا (لتناظر أوضاعها) الحاصلة من تقاطع نصـــفي المستويين P و Q (الشكل ١٨٩) . ولرسم زاويتها الخطية نقطع ضلعها MN بمستو S عموديا عليه .

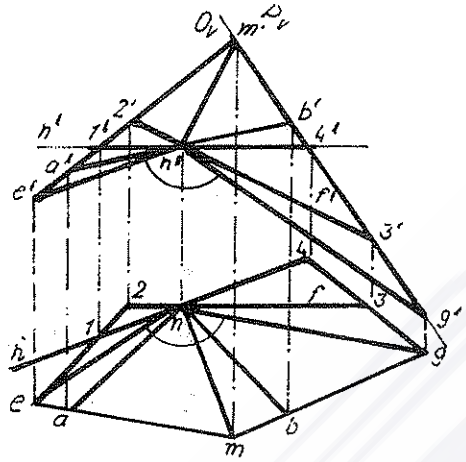
لرسم مساقط الزاويـــة الخطية لتقاطع مستويين نتبع الخطوات التي يوضحها الشكل (١٩٠) حيث أن المســـتوي P محدد بالمثلث AMN والمستوي Q محدد بالمثلث BMN :



شكل رقم (١٨٩)

١ـ نمرر من النقطة N مستويا S عموديا على MN ٠ محددا بجبهته NF وأفقه NH ٠

٢ـ نحدد خط تقاطع المستويين P و S وهو المستقيم EN ٠ ولما كان المستوي S يمر أساسا من النقطة N التي تنتمي الى المستوي P فاننا نحتاج الى تحديد النقطة E ، ولهذا الغرض نستخدم مستويا مساعدا T ٠



شكل رقم (١٩٠)

٣ـ نحدد خط تقاطع المستويين Q و S ، وهو المستقيم NG ، وهنا نحتاج أيضا الى تحديد النقطة G لأن النقطة N أساسا تنتمي الى المستويين ٠

تمثل النقطة N رأس الزاوية الخطية المعنية ، ولهذا تمثل الزاوية eng المسقط الأفقي للزاوية المعنية و e'n'g' ـ مسقطها الأمامي ٠

الفصل السابع :

الأجسام الهندسية

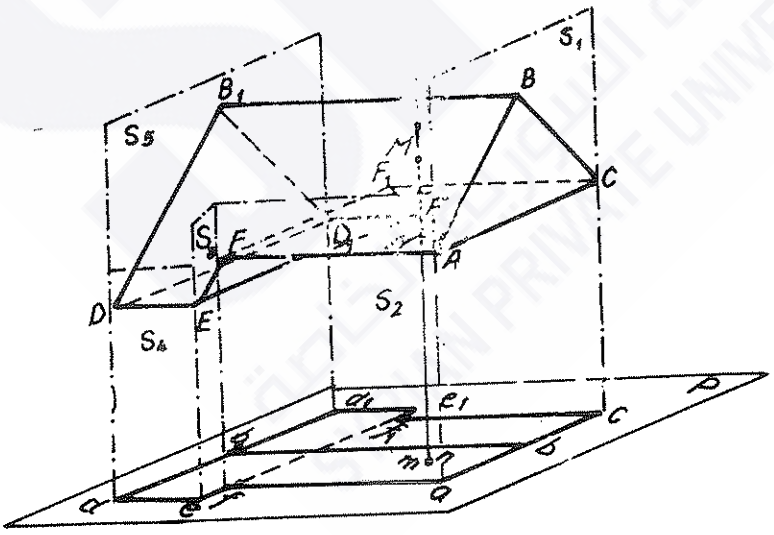
متعددة السطوح المستوية

- اسقاط متعددات السطوح .
- اسقاط متعددات السطوح دون استخدام محاور الاسقاط .
- الهرم والموشور واسقاطهما .
- العناصر الهندسية الواقعة على سطوح الجسم متعدد السطوح المستوية .
- تقاطع الموشور أو الهرم مع مستو .
- تقاطع هرم أو موشور مع مستقيم .
- تقاطع الأجسام متعددات السطوح .

يمكن أن ننظر الى الأجسام الهندسية متعددة السطوح المستوية على أساس أنها مجموعة من المستويات ذات الأشكال الهندسية المحددة والمتقاطعة فيمابينها تتخذ أحيانا أوضاعا خاصة بالنسبة لمستويات الاسقاط .

VII-1- اسقاط متعددات السطوح :

ان ايجاد مساقط جسم هندسي ما على مستوي اسقاط أو مجموعة مستويات اسقاطية محددة يلخصه ويحدده عمليا ايجاد مساقط بعض نقاطه وخطوطه .



شكل رقم (١٩١)

لدينا في الشكل (١٩١) الجسم الهندسي $ACBB_1\ DEFF_1\ E_1\ D_1$ والشكل

$acf_1 e_1 d_1 d e f$ الذي يمثل مسقطه على المستوي P .

ان كل نقطة واقعة داخل حروف هذا الشكل (أي داخل الخطوط التي تحدد هذا الشكل) يمكن أن تمثل مساقط مجموعة من نقاط الجسم المعني ، وتمثل على الأقل نقطتين من سطحه . مثلا : تمثل النقطة ذات الرمزين m و n في المسقط في آن معا مسقطا لكل من النقطتين M و N وهي أيضا مسقط جميع النقاط الواقعة في الجسم على مستقيم اسقاطي واحد يمر من النقطتين M و N (أي عمودي على مستوي الاسقاط P) .

أما النقاط الواقعة على حروف مسقط الجسم (الخطوط التي تحدده) فهي يمكن أن تمثل مسقط نقطة واحدة من الجسم ، كالنقاط A و C و D و E ، ... الخ ، ومساقطها a و c و d و e ، ... الخ ، أو أنها تمثل مساقط مجموعة من النقاط أو عدد لامتناه من النقاط . مثلا : لاتمثل النقطة b في المسقط مسقط النقطة B فحسب ، وانما تمثل مساقط العدد اللامتناهي من نقاط الواجهة ABC الواقعة على المستقيم الاسقاطي Bb .

وتمثل المستقيمات المارة من جميع نقاط حروف المسقط سطحا اسقاطيا يحوي الجسم المعني في داخله ويمسه ، وتمثل السطوح S_1 ، S_2 ، S_3 ، ... الخ السطوح الاسقاطية التي تحوي الجسم الذي يوضحه الشكل (١٩١) ، وتسمى مستقيمات التماس بين الجسم وهذه السطوح بـ " حروف " الجسم ، سواء أكان ذلك فراغيا أم اسقاطيا . وعلى هذا الأساس يمثل الخط المتكسر $A C F_1 E_1 D_1 D E F A$ في الشكل (١٩١) حروف الجسم بالنسبة لمستوي الاسقاط P .

ان المستقيم المرسوم في المسقط bb_1 يمثل مسقط الحرف BB_1 المرئي بالنسبة لمستوي الاسقاط P . ويجب أن نشير هنا الى أن تحديدجميع

الحروف المرئية للجسم على مسقطه يعد مسألة الزامية ٠

ان مسقط الحرف FF_1 يكون داخل اطار المسقط ، ولذلك نجده غير مرئي بالنسبة لمستوي الاسقاط P ، وعلى هذا الأساس يمثل بخط منقط (متقطع) ٠

VII ـ٢ـ اسقاط متعددات السطوح دون استخدام محاور الاسقاط :

تكلمنا في الفصل الثالث (III ـ٣) عن الاسقاط الشامل (دون استخدام محاور الاسقاط) وتوصلنا الى أن المسألة الأساسية للعنصر الهندسي الفراغي هي تحديد الحيز (الشكل والحجم) الفراغي الذي يحتله من الفراغ ، وهذا الحيز الفراغي غير مرتبط بموقع محدد ، مثلا : ان شكل وحجم القلم الذي نكتب به لايتغير سواء أنظرنا اليه في قاعة الدراسة أو في الشارع أم في البيت أم في أي مكان آخر ٠ وهذا يعني أن هناك امكانية للاستغناء عن المفهوم الموقعي للاسقاط مع المحافظة على أسس الاسقاط العامة التي تتلخص بمايلي :

١ـ المساقط الأفقية والأمامية للعنصر الهندسي تقع على مستقيم شاقولي واحد ٠

٢ـ المساقط الأمامية والجانبية للعنصر الهندسي تقع على مستقيم أفقي واحد ٠

٣ـ لايتأثر وضع العناصر الهندسية بالنسبة لبعضها بعضا عند الاستغناء عن محاور الاسقاط ، ويتحدد هذا الوضع بفارق احداثياتها ، وهي قيم ثابتة دائما بغض النظر عن الموقع الاسقاطي المشترك لهذه العناصر ٠ ويمكن التعبير عن ذلك بالعلاقات التالية :

$$\left| X_1 - X_2 \right| = const \qquad (\text{ثابت})$$

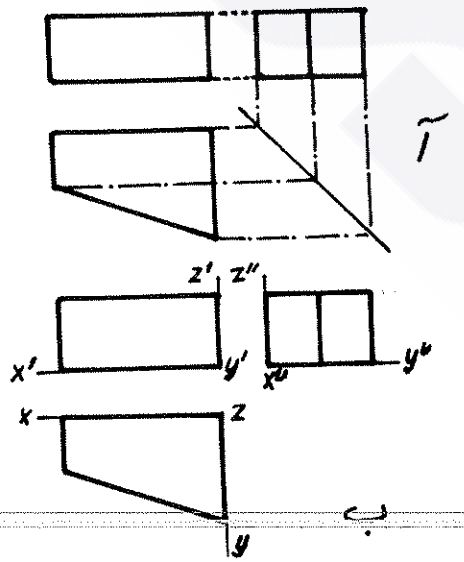
$$\left| Y_1 - Y_2 \right| = const \qquad (\text{ثابت})$$

$$\left| Z_1 - Z_2 \right| = const \qquad (\text{ثابت})$$

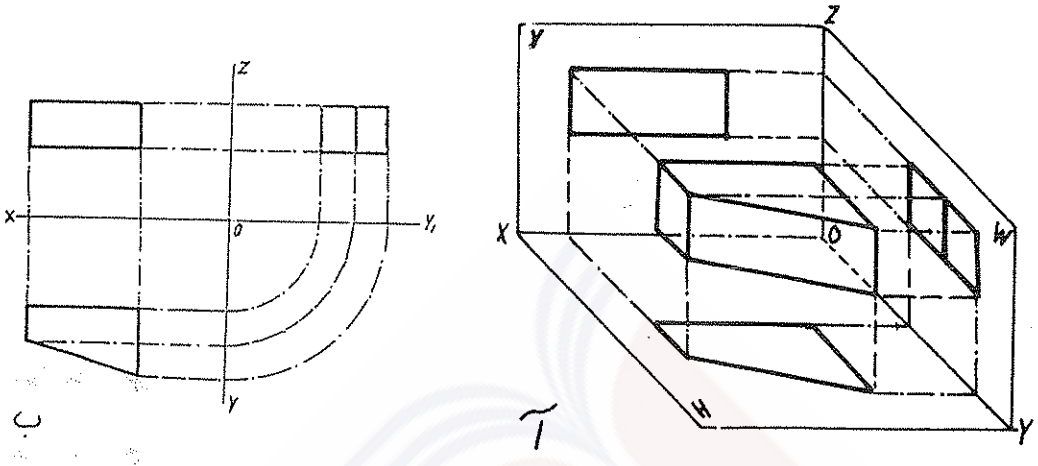
هذه الخواص هي التي نستند اليها عند تحديد مساقط متعددات السطوح دون استخدام محاور الاسقاط ، فالقيم المذكورة في الفقرة (٣) تمثل بالنسبة لمتعددات السطوح الأبعاد بين الحواف والسطوح الجانبية (وهو مايسمى بطول متعددات السطوح L) وبين الحواف والسطوح الأمامية (وهو مايسمى بعرض متعددات السطوح B) وبين الحواف والسطوح الأفقية (وهو مايسمى بارتفاع متعددات السطوح H) .

بالاضافة الى تبسيط عملية رسم المساقط نرى أن الاسقاط دون استخدام محاور الاسقاط يفسح المجال للتصرف بالفراغات (المسافات) بين مساقط العنصر الهندسي الواحد ، وذلك بمايتناسب ومجال الرسم المستخدم .

لدينا في الشكل (١٩٢) تعبيران اسقاطيان للموشور ، الذي يوضح وضعه الفراغي الشكل (١٩٣ آ) دون استخدام محاور الاسقاط . في التعبير الأول استخدمنا لرسم المسقط الجانبي مستقيما ينصف الزاوية القائمة (الشكل ١٩٢ آ) وفي التعبير الثاني (الشكل ١٩٢ ب) استخدمنا الأبعاد بين سطوحه المتوازية . ومن المقارنة بين الشكلين (١٩٢ و١٩٣ ب) يتضح لنا أن الحيز الذي يشغله التعبيران الاسقاطيان دون استخدام المحاور هو أقل

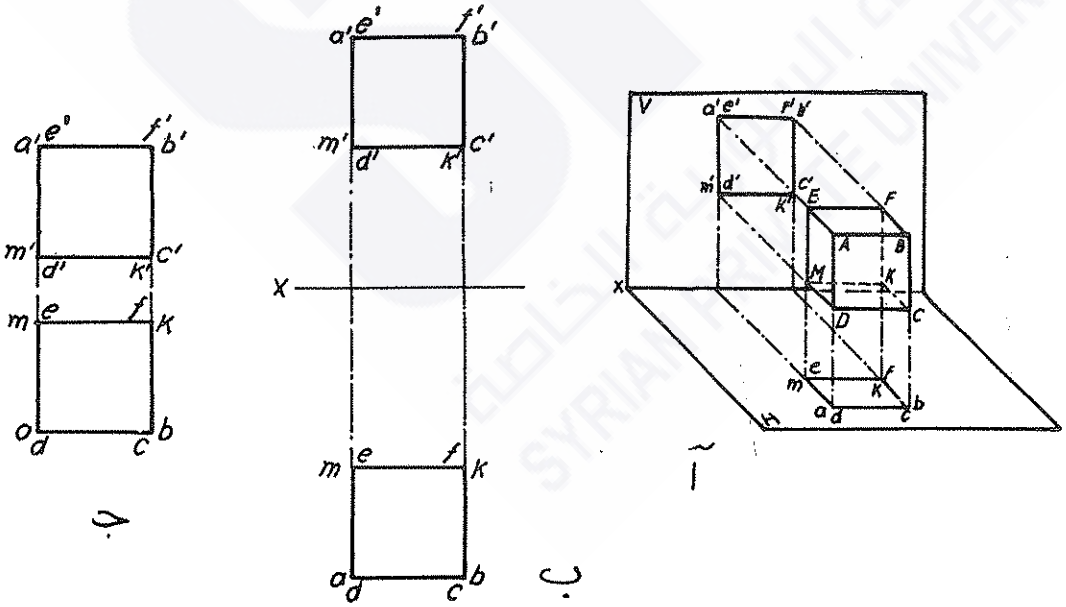


شكل رقم (١٩٢)



شكل رقم (١٩٣)

من الحيز الذي يشغله التعبير الاسقاطي الذي استخدمت فيه محاور الاسقاط ٠ والشيء نفسه يتضح من خلال مقارنة التعبيرين الاسقاطيين في (ب) و (جـ) للمكعب الذي يعبر عنه فراغيا الشكل (١٩٤ آ) ٠



شكل رقم (١٩٤)

VII ـ٣ـ الهـــرم والموشـــــور :

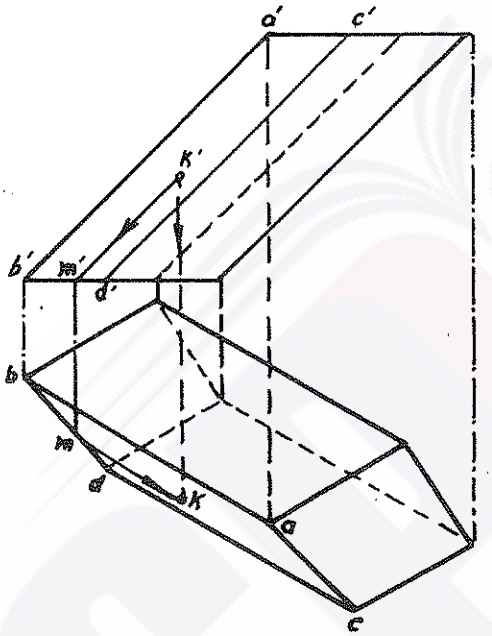
اذا كان لدينا سطح مستو (مثلث أو مربع أو متعدد الأضلاع) ونقطـــة خارجة عنه فان من الممكن حسب قواعد انشاء المستوي أن نمرر مستويات مـن هذه النقطة الى كل ضلع من أضلاع السطح المذكور • هذه المستويات التـــي تحدد بالمستقيمات الواصلة بين النقطة ورؤوس السطح المستوي ، والتـــي نسميها ب " **حروف الجسم** " ، تشكل جسما منتظما متعدد السطوح نسميـــه ب " الهرم " ، فالسطح المستوي يكوّن " قاعدته " والنقطة الخارجة عنـــه تكوّن " قمته " • واذا كانت هذه النقطة في اللانهاية ، فاننا سنحصل عـــلى جسم منتظم متعدد السطوح حروفه متوازية تلتقي في النقطة المعنيـــة فـي اللانهاية ، ونسمي هذا الجسم ب " **الموشور** " ، يكوّن السطح المســـتوي " قاعدته " ، ويسمى الموشور ب " الموشور القائم " عندما تعامد حروفـــه قاعدته ، وان لم يتعامدا سمي ب " موشور مائل " • ويسمى الموشور القـائم منتظما اذا كانت قاعدته منتظمة ، أي : متساوية الأضلاع • وأما الهـــرم فسيُعّد منتظما اذا كانت قاعدته منتظمة وقمته واقعة على العمود المقام من مركز قاعدته •

VII ـ٣ـ١ـ مساقط الموشـــور والهرم :

توصلنا في الفقرة (VII ـ١ـ١) الى أن رسم مساقط الموشور أو الهرم يتم برسم مساقط نقاط ومستقيمـــات معينة تمثل نقاط حوافها وحروفها ووفق القواعد والأســس العامة للاسقاط •

شكل رقم (١٩٥)

في بعض الحالات،يكفي التعبير المستوي الاسقاطي الثنائي في تحديد شكل الجسم الهندسي المتعدد السطوح ووضعه ، كما هو الحال في مساقط الأجسام التي توضحها الأشكال (١٩٥ و ١٩٦ و ١٩٧) ٠



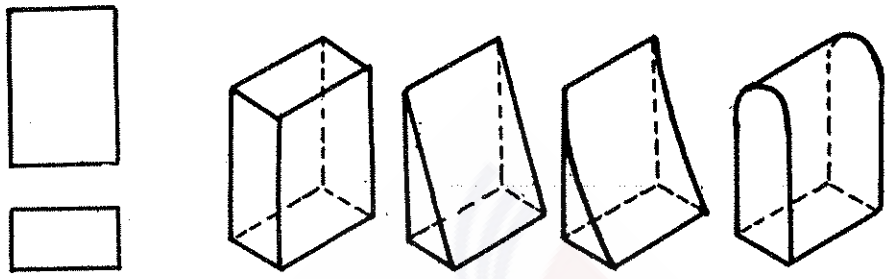
شكل رقم (١٩٧)

شكل رقم (١٩٦)

لدينا في الشكل (١٩٥) موشور مثلث قائم ، وفي الشكل (١٩٦) مكعب يدل على أنه مكعب تساوي أضلاعه وتعامد حوافه ، وفي الشكل (١٩٧) موشور رباعي مائل ٠

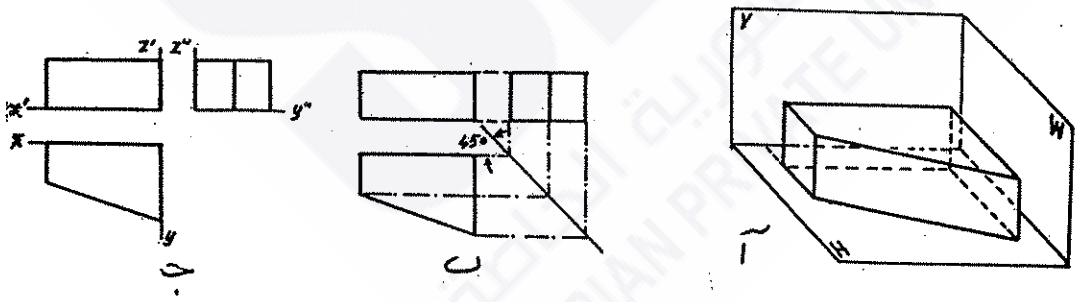
وفي حالات أخرى يكون هذا التعبير غير كاف لاعطاء الصورة الحقيقية والفعلية للجسم المعني ٠ مثلا : في الشكل (١٩٨) نجد أن المساقط يمكن أن تكون لأي جسم من الأجسام المجاورة لها ٠ وفي هذه الحالات لابد أن تحدد الصورة من خلال التعبير المستوي الاسقاطي الثلاثي ٠

لدينا في الشكل (١٩٩ آ) موشور ناقص رباعي الزوايا تمثل سطوحه



شكل رقم (١٩٨)

الأفقية قاعدتيه العليا والسفلى • والشكل (١٩٩ ب) يوضح تعبيره المستوي الاسقاطي الثلاثي المرسوم بمساعدة مستقيم منصف مساعد دون استخدام محاور الاسقاط • والشكل (١٩٩ جـ) يوضح أن المساقط مرسومة باحداثيات كل مستو من مستويات الاسقاط ، وبتعبير آخر نقول : انها مرسومة بفارق احداثيات سطوح متعدد السطوح هذا ، أي : الموشور الرباعي الناقص ، كما بيناً ذلك في الفقرة (VII ـ١ـ٢) •

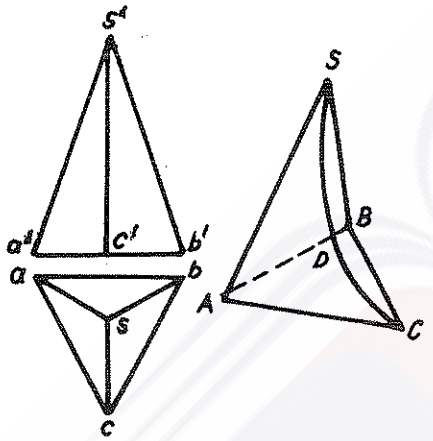


شكل رقم (١٩٩)

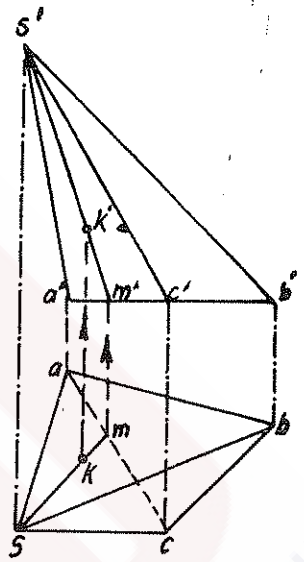
ولتمثيل الهرم يجب أن نحصل على شكل سطوحه الجانبية ونقطة تقاطعها (قمته) • وبشكل عام نعبر عن الهرم برسم مساقط قاعدته وقمته • وأما الهرم الناقص فان مساقط قاعدتيه العليا والسفلى يجب أن ترسم بفضل اختيار الوضعية الملائمة لتمثيل الهرم على أساس وضع قاعدته التي توازي

أحد مستويات الاسقـاط ٠

يوضح الشكل (٢٠٠) التعبير المستوي الاسقاطي الثنائي لهرم مثلث غيـر



شكل رقم (٢٠١)

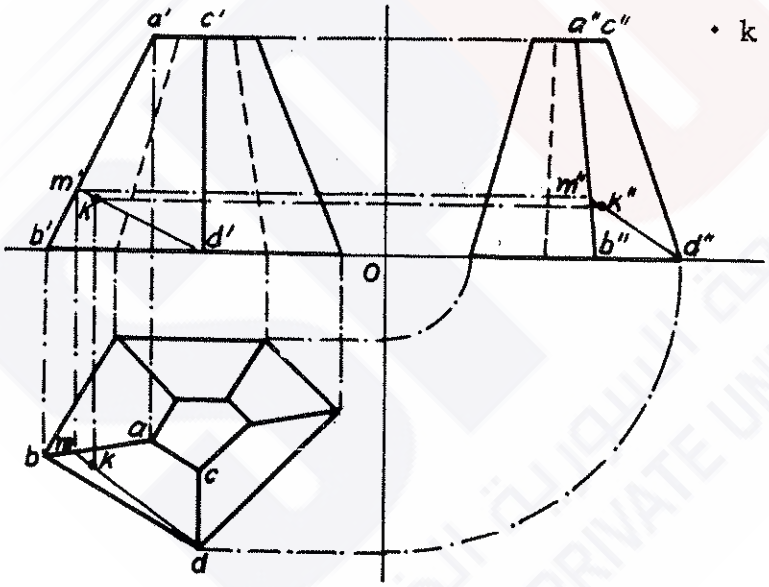


شكل رقم (٢٠٠)

منتظم قاعدته توازي مستوي الاسقاط الأفقي H ٠ ونلاحظ أن هذا التعبير كاف لتصوير وضعية الهرم وشكله ٠ ومع ذلك نجد أن ثمة حالات يتضح من خلالهـا عدم كفاية هذا التعبير لاعطاء الصورة الحقيقية للجسم الهرمي ٠ مثـلا : في التعبير الاسقاطي الذي يوضحه الشكل (٢٠١) يغدو من الصعب أو من الخطـأ التأكيد على أن هذه المساقط تمثل هرما بالذات ٠ ففي هذا التعبير يبـقى غير واضح شكل وطبيعة الخطوط الواقعة في الوجه الجانبي من الجسم ٠ فمـن الممكن أن تمثل هذه الخطوط حروفا منحنية ، وبالتالي لن تكون السـطوح المحددة بها سطوحا مستوية ، كما هو واضح من الجسم المنظور في الشكـل نفسه ٠ وفي مثل هذه الحالة تكون الكلمة الحاسمة للمسقط الجانبي من هـذا الشكل ٠

VII ـ٤ـ العناصر الهندسية الواقعة على سطوح (أوجه) الجسم متعـــدد السطوح المستوية :

لايجاد موقع نقطة ما واقعة على أحد سطوح الجسم المتعدد السطوح المستوية لابد أن نربط مساقط هذه النقطة مع مساقط السطح الواقعة فيه ومع مساقط حروفه بواسطة مستقيم مساعد • مثلا : في الشكل (١٩٧) تقع النقطة K على السطح AB CD من الموشور الرباعي المائل • واذا ماافترضنا أن لدينا المسقط الأمامي للنقطة k' ، فان المطلوب ايجاد مسقطها الأفقي k •



شكل رقم (٢٠٢)

لأجل ذلك نمرر من النقطة K مستقيما واقعا في المستوي ABCD وموازيا لأحد حروفه ، وليكن AB ، فيقطع هذا المستقيم الحرف BD في النقطة M • ولذلك نرسم مسقطه الأمامي m'k' ، ونوجد للنقطة M مسقطها الأفقي m الواقع على المسقط الأفقي bd للحرف BD • ومن النقطة m

نرسم مستقيما موازيا لـ ab المسقط الأفقي للحرف AB ، وبعد ذلك نوجد المسقط الأفقي k للنقطة K من تقاطع mk مع الشاقول المرسوم من نقطة k' ٠

يمكن استخدام الطريقة ذاتها في ايجاد (تمثيل) نقطة واقعة على أحد السطوح الجانبية لهرم ٠

يوضح الشكل (٢٠٠) طريقة تمثيل النقطة K الواقعة على السطح ASC من الهرم ٠ فاذا فرضنا أن لدينا المسقط الأفقي k لهذه النقطة فان المطلوب ايجاد مسقطها الأمامي 'k لاستكمال تمثيلها ٠

ولهذا الغرض نمرر من قمة الهرم S على السطح (الوجه) S A C مستقيما يمر بالنقطة K فيقطع حرف القاعدة AC في نقطة M ٠ ونرسم المسقط الأفقي لهذا المستقيم بوصل النقطتين s و k ونمدده حتى يقطع ac فنحصل على النقطة m ، وهي المسقط الأفقي للنقطة M ٠ نوجد المسقط الأمامي 'm لهذه النقطة ، ونوصل 'm و's فنحصل على المسقط الأمامي للمستقيم المساعد 's'm ، وبعد ذلك نحدد عليه المسقط الأمامي 'k للنقطة المطلوبة ٠

بالطريقة نفسها يمكن ايجاد مساقط النقطة K الواقعة على السطح (الوجه) ABCD من الهرم الخماسي الناقص (الشكل ٢٠٢) والمعطى بمساقطه في التعبير المستوي الاسقاطي الثلاثي ٠

يجب أن نلاحظ في جميع الحالات السابقة أن المستقيم المساعد المستخدم هو مستقيم كيفي يمكن أن نختاره ، وهو في أي وضع كان ، بحيث يمكننا ذلك من ايجاد أبسط الحلول وأسرعها ٠

مثـــال :

هرم ثلاثي منتظم ، قاعدته توازي مستوي الاسقاط الأفقي H ، وهـــو محدد في التعبير المستوي الاسقاطي الثلاثي ، تخترقه فتحة موشوريـــــة ، مسقطها الأمامي محدد • استكمل تمثيل هذه الفتحة (الشكل ٢٠٣) •

الحـــل :

لاستكمال تمثيل الفتحة يجب ايجاد مسقطيها الأفقي والجانبي ، وقبـل البحث عنها يجب أن نلاحظ أن كل نقطة من نقاط المسقط الأمامي للفتحـــة تمثل مساقط نقاط اختراق وجهين على الأقل من أوجه الهرم ، ولايجاد بقيـــة المساقط نقوم بمايلي :

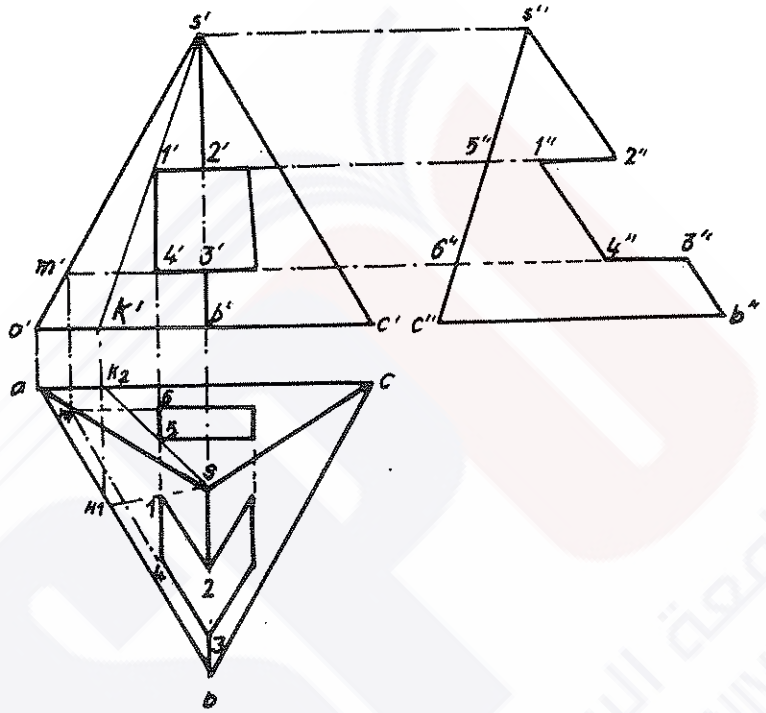
١ـ نمرر من مسقط قمة الهرم 's والنقطة '1 مستقيما فيقطع المسقطين 'a'b و 'a'c في النقطة 'k ، ونحدد على المسقطين الأفقييـــن 'ab و ac المساقط الأفقية k_1 و k_2 •

٢ـ نوصل k_1 و k_2 بـ s ، فنحصل على المساقط الأفقية للمستقيميـن المساعدين sk_1 و sk_2 ، ونحدد عليهما المساقط الأفقية للنقطتين 1 و 5 الحاصلتين من تقاطع الشاقول المنزل من نقطة '1 مع هذيـــن المستقيمين •

٣ـ نمرر من النقطتين '3 و '4 مستقيما يوازي مستوي الاسقاط الأفقـي H ، فيقطع الحرف 's'a في النقطة 'm ، ويمثل المسقط الأمـــامي لمستقيمين أفقيين واقعين في وجهي الهرم SAB و SAC • نوجـــد مسقطيهما الأفقيين بايجاد المسقط الأفقي m على sa ، ومن ثـــم نرسم منها مستقيمين يوازيان ac و ab ، لأن حروف القاعدة هـــي أيضا مستقيمات أفقية • ونحدد النقاط 3 و 4 و 6 من تقاطـــع

الشاقولين المنزلين من '3 و '4 مع هذين المستقيمين .

٤ـ النقطة 2 يمكن ايجادها بنفس الطريقة السابقة التي اتبعت في ايجاد النقطة 3 ، أو بمساعدة المسقط الجانبي .



شكل رقم (٢٠٣)

٥ـ يتم ايجاد المساقط الجانبية لهذه النقاط بتطبيق قواعد الاسقاط .

VII ـ ٥ ـ تقاطع الموشور أو الهرم مع مستو :

لرسم الأشكال الحاصلة من تقاطع الموشور أو الهرم مع مستو ، يجب التوصل الى أحد أمرين :

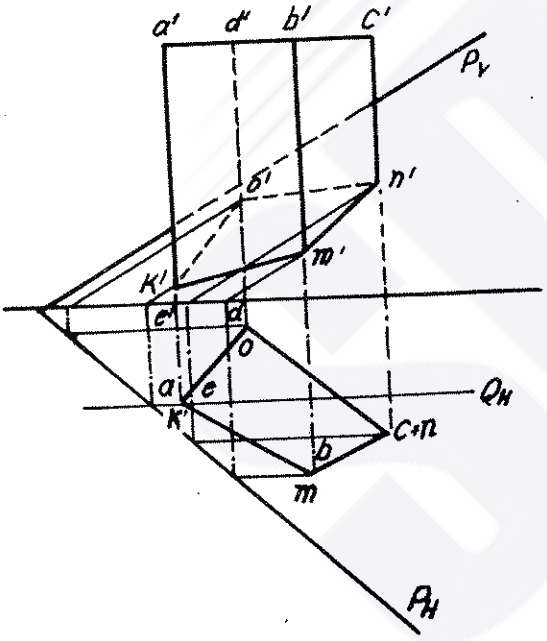
١ـ نوجد نقاط تقاطع حروف الموشور أو الهرم مع المستوي المعني ، في هذه الحالة نحصل على مسألة تقاطع مستقيم مع مستو تحل وفق القواعد التي تحددها .

٢ـ نوجد مقاطع مستقيمات الفصول المشتركة بين المستوي وكل من مستويات سطوح (أوجه) الموشور أو الهرم ، وفي هذه الحالة نحصل على مسألة تقاطع مستويات ، فتحل وفق القواعد التي تحددها أيضا .

في الحالات التي يكون المستوي المتقاطع في وضعية عامة تكون مساقط سطح التقاطع مشوهة شكلا وقياسا . واذا طلب ايجاد الشكل أو القياسات الحقيقية فالواجب أن نرجع الى احدى الطرق الموضحة في الفصول السابقة من هذا الكتاب لايجاد الوضعية والقياسات الحقيقية المطلوبة .

مثـــال :

حدد في التعبير الاسقاطي سطح تقاطع الموشور المنتظم القائم A B C D E F G H مع المستوي P في حالته العامة والمحدد بأثريه (الشكل ٢٠٤).



شكل رقم (٢٠٤)

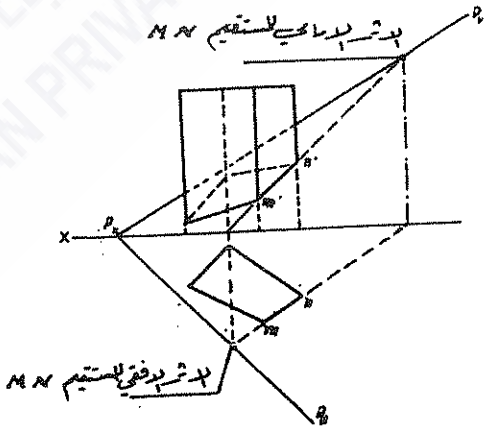
الحـــل :

اذا اتبعنا الطريقة الأولى فاننا سنتوصل الى حل يوضحه الشكل (٢٠٤) الذي يبين أن قاعدة الموشور القائم موازية للمستوي الاسقاط (في هذه الحالة موازية للمستوي H)، ولهذا يتطابق المسقط الأفقي لسطح التقاطع mnko مع المسقط الأفقي للموشور نفسه . ويبقى علينا ايجاد المسقط الأمامي لسطح التقاطع . ولما كانت نقاط رؤوس سطح التقاطع الرباعي الشكل : O و K و N و M تمثل نقاط

تقاطع أحرف الموشور مع المستوي P فان حل المسألة يتم على أساس ايجاد نقطة تقاطع مستقيم (حرف الموشور) مع المستوي P . لهذا الغرض نأخذ أحد الحروف ، وليكن الحرف AE ، ونمرر منه مستويا Q موازيا لمستوي الاسقاط الأمامي ، فيتقاطع مع المستوي P بمستقيم أمامي مسقطه الأفقي منطبق على الأثر الأفقي Q_h . نحصل على مسقطه الأمامي من خلال ايجاد أثره الأفقي و مسقطه الأمامي على خط الأرض ومن هذا المسقط نرسم مستقيما موازيا للأثر الأمامي P_v ، فيقطع a'e' في النقطة k' التي تمثل المسقط الأمامي لنقطة تقاطع الحرف AE مع المستوي P . وبالطريقة ذاتها نوجد المساقط الأمامية m' ، n' ، o' واذا ماوصلنا بينها بمستقيمات نحصل على المسقط الأمامي m'n'k'o' لسطح تقاطع الموشور مع المستوي P .

وفي الطريقة الثانية نجد أن تحديد المسقط الأمامي لسطح التقاطع يتم من خلال ايجاد الفصول المشتركة بين سطوح الموشور والمستوي P ،وبمعنى آخر نقول : نستخدم موضوعة تقاطع مستويين وتحديد فصلهما المشترك (الشكل ٢٠٥) .

نأخذ أحد حروف (أضلاع) المسقط الأفقي للموشور ، وليكن bc ، وهو في الوقت نفسه المسقط الأفقي mn لخط تقاطع المستوي P مع وجه (سطح) الموشور B C G F . وفي هذه الحالة نجد أن آثاره تقع على آثار المستوي P التي تناظرها .



شكل رقم (٢٠٥)

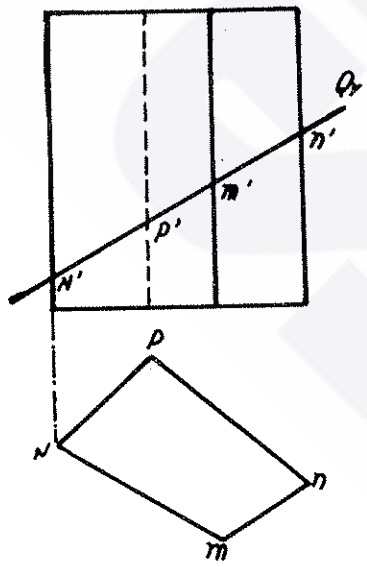
ولذلك نمد mn حتى يقطع الاثر الافقي P_h للمستوي في نقطة h التي تمثل أثر المستقيم MN الأفقي • نوجد 'h على خط الأرض • من جهة أخرى نمد mn حتى يقطع خط الأرض في النقطة v التي تمثل المسقط الأفقي للأثر الأمامي للمستقيم MN والذي يجب أن يقع على الأثر الأمامي للمستوي P_v ، ثم نوجد 'v ، وبذلك نحصل على نقطتين للمسقط الأمامي لخط تقاطع المستوي مع هذا الوجه من الموشور ، ونوجد النقطتين 'n و 'm من تقاطع هذا المستقيم مع حروف المسقط الأمامي لوجه الموشور المعني •

نكرر هذه العملية بالنسبة لبقية حروف (أضلاع) المسقط الأفقي ، فنوجد المساقط الأمامية لخطوط تقاطع المستوي P مع بقية أوجه الموشور •

حالة خاصة :

اذا كان المستوي P المتقاطع مع الموشور عموديا على أحد مستويات الاسقاط تصبح مسألة ايجاد مساقط سطح التقاطع سهلة ومباشرة ، لاتحتاج الى عمليات اضافية أو استخدام عناصر هندسية مساعدة•

مثلا : لدينا في الشكل (٢٠٦) موشور منتظم قاعدته توازي مستوي الاسقاط الأفقي H وهو يتقاطع مع مستوي اسقاطي أمامي Q •

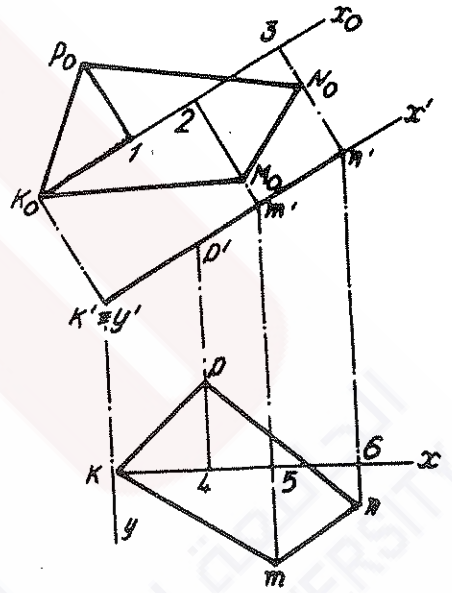


شكل رقم (٢٠٦)

ينطبق المسقط الأفقي لسطح التقاطع كماهو واضح في المثال السابق على المسقط الأفقي للموشور نفسه ، وينطبق المسقط الأمامي لهذا السطح على الأثر الأمامي P_v للمستوي ، وتمثل نقاط

تقاطع هذا الأثر مع المسقط الأمامي لحروف الموشور رؤوس هذا السطح .

لايجاد الشكل الحقيقي لسطح تقاطع المستوي Q مع الموشور هناك طريقة (بالاضافة الى الطرق المذكورة في الفصول السابقة من هذا الكتاب)، يمكن تلخيصها بالخطوات التالية التي يوضحها الشكل (٢٠٧) :



شكل رقم (٢٠٧)

١ـ نرسم من احدى نقاط المسقط الأفقي لسطح التقاطع ، ولتكن النقطة k ، محاور احداثية ، أحدها KX يوازي مستوي الاسقاط الأمامي والآخر KY يعامد هذا المستوي .

٢ـ نفترض أن المسقط الأمامي k'x' للمحور KX يتخذ الوضعية التي يوضحها الشكل (وهي الوضعية الحقيقية الفراغية للمحور). أما المسقط الأمامي للمحور KY(k'y') فتمثله نقطة واحدة لأنه عمودي على المستوي V .

٣ـ نرسم المستقيم K_oX_o موازيا لـ k'x' ، وذلك على مسافة كيفية منه.

٤ـ نأخذ من النقطة K_o على المستقيم K_oX_o المسافات :

$K_o\,1 = k'p'$ و $K_o\,2 = k'm'$ و $K_o\,3 = k'n'$.

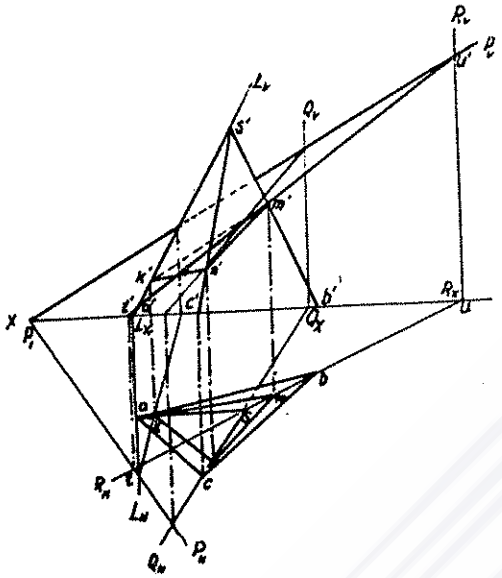
٥ـ نقيم من النقاط 1 و 2 و 3 أعمدة على K_oX_o ونحدد عليها المسافات : $P_o\,1 = p\,4$ و $M_o\,2 = m\,5$ و $N_o\,3 = n\,6$.

٦ـ نوصل بين النقاط K_o و P_o و N_o و M_o على التوالي ، فنحصل على الشكل $K_oP_oN_oM_o$ الذي يمثل الشكل الحقيقي لسطح التقاطع بين

المستوي Q والموشور .

ندرس الآن حالة تقاطع مستو في الحالة العامة مع هرم ثلاثي قائم (الشكل ٢٠٨) ويوضحها المثال التالي:

مثال ٢ : ارسم مساقط سطح تقاطع الهرم القائم SABC مع المستوي P في حالته العامة .



شكل رقم (٢٠٨)

(ملاحظة : الشكل منفذ بافتراض أن المستوي P شفاف) .

الحل : لتعيين سطح التقاطع نحدد - كما ذكرنا سابقا - نقاط تقاطع حروف (أضلاع) الهرم مع المستوي P .

لايجاد نقطة تقاطع الحرف SB للهرم مر المستوي P نمرر من SB مستويا اسقاطيا أفقيا R (أي نتبع نفس الطريقة المتبعة في ايجاد نقطة تقاطع مستقيم مع مستو في الحالة العامة) ، آثراه R_h و R_v . يتقاطع هذا المستوي مع المستوي P بالمستقيم TU (ينطبق مسقطه الأفقي tu على المسقط الآفقي sb لحرف الهرم وينطبقان معا على الأثر الأفقي R_h للمستوي المساعد) ، فنحصل من تقاطع المسقط الأمامي t'u' مع المسقط الأمامي s'b' على المسقط الأمامي m' لنقطة تقاطع M حرف الهرم SB مع المستوي P . وبعد ذلك نوجد حسب قواعد الاسقاط المسقط الأفقي m لهذه النقطة والواقع على sb .

بالطريقة نفسها نحدد المسقطين الأمامي n' والأفقي n لنقطة N تقاطع حرف الهرم SC مع المستوي P (في هذه الحالة استخدمنا المستوي الاسقاطي الأفقي Q) .

لايجاد نقطة تقاطع الحرف SA مع المستوي P نمرر من هذا الحرف مستويا اسقاطيا أماميا L ، ونلاحظ أن المسقط الأمامي لخط التقاطع يتطابق مع المسقط الأمامي s'a' لحرف الهرم SA وكلاهما يتطابقان مع الأثر الأمامي للمستوي المساعد L_v . ولهذا نحدد أولا المسقط الأفقي k

لنقطة K تقاطع حرف الهرم SA مع المستوي P • هذه النقطة نحصل عليها من تقاطع المسقط الأفقي sa للحرف مع المسقط الأفقي لخط تقاطع المستويين P و L • ووفق قواعد الاسقاط نحدد المسقط الأمامي k' لهذه النقطة •

وبالوصل بين النقاط m' و n' و k' نحصل على المسقط الأمامي لسطح التقاطع وبالوصل بين النقاط m و n و k نحصل على مسقطه الأفقي •

ولابد أن نؤكد أن اختيار المستوي المساعد المار من حرف الهرم أو الموشور في كل حالة منفردة يجب أن يكون قائما على أساس الحصول على أبسط حل ممكن وبشكل مباشر تقريبا •

VII ـ٦ـ تقاطع هرم أو موشور مع مستقيم :

عند تقاطع مستقيم مع سطوح هرم أو موشور نحصل على نقطتين احداهما تسمى نقطة الدخول والأخرى تسمى نقطة الخروج ، تحددان بواسطة تمرير مستو من المستقيم المعني وايجاد خطوط تقاطع هذا المستوي مع سطوح الجسم (الهرم أو الموشور) • وتقع خطوط التقاطع هذه جميعها في مستو واحد مع المستقيم المعني ، وتحدد نقاط تقاطع المستقيم مع هذه الخطوط نقاط تقاطعه مع الهرم أو الموشور المعني •

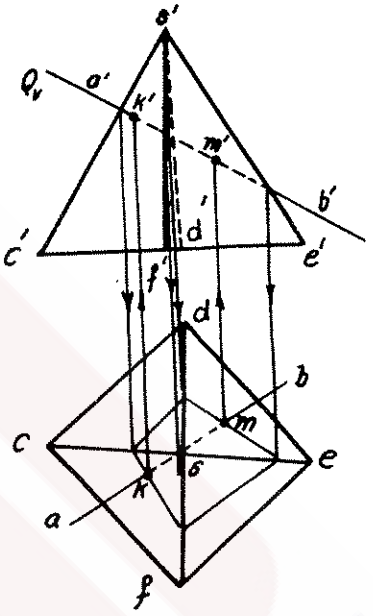
مثال ١ :

حدد نقطتي دخول المستقيم AB وخروجه عند قاطعه مع الهرم الرباعي SCDEF (الشكل ٢٠٩) •

الحل :

نمرر من المستقيم AB مستويا مساعدا اسقاطيا أماميا Q • المسقط

الأمامي لسطح تقاطع هذا المستوي مع الهرم يتطابق مع الأثر الأمامي Q_v للمستوي . أما المسقط الأفقي لهذا السطح فاننا نحدده انشائيا ، كما هو موضح في الشكل (٢٠٩) . ان نقاط تقاطع المسقط الأفقي ab للمستقيم AB مع المسقط الأفقي لسطح تقاطع المستوي Q مع الهرم تحدد المساقط الأفقية لنقطتي دخول المستقيم AB وخروجه وهما النقطتان k و m ، ونوجد مسقطيهما الأماميين k' و m' وفق أسس الاسقاط العامة .



شكل رقم (٢٠٩)

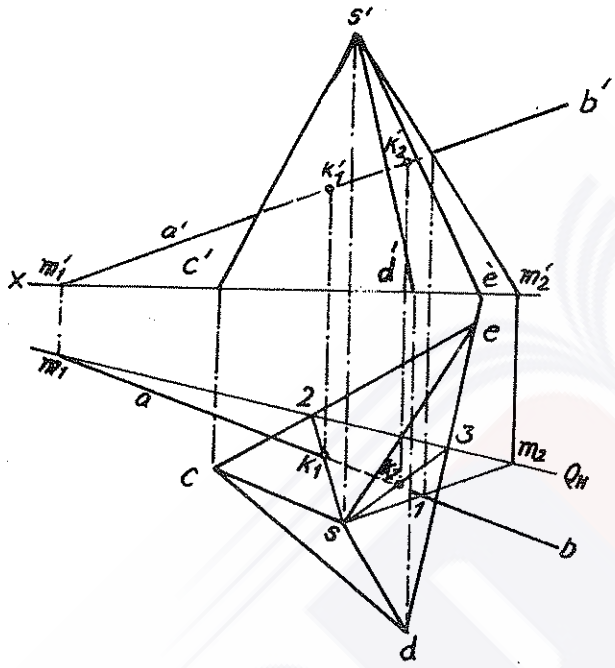
مثـــال ٢ :

حدد نقطتي دخول وخروج المستقيم AB المتقاطع مع الهرم الثلاثي S C D E (الشكل ٢١٠) .

الحـــل :

نمرر من المستقيم AB وقمة الهرم S مستويا Q الذي سيقطع سطحين من سطوح الهرم بمستقيمين مارين من قمته S . لتمثيل هذا المستوي نرسم مستقيما اضافيا كيفيا S 1 يمر من النقطة (1) الواقعة على المستقيم AB ، وبهذا يصبح المستوي Q محددا بمستقيمين متقاطعين ، هما A B و S 1 . بعد ذلك نرسم أثر هذا المستوي في مستوي قاعدة الهرم

(في مثالثنا هذا قاعدة الهرم توازي مستوي الاسقاط الأفقي H ، ولذلك يبدو الأثر المرسوم وكأنه أثر في المستوي H)، يتقاطع هذا الأثر مع قاعدة الهرم بالنقطتين 2 و 3 اللتين تنتميان الى خطي تقاطع المستوي Q مع سطوح الهرم • وفي مثالنا هذا يكفي أن نرسم المساقط الأفقية s2 و s3 لهذين الخطين • تمثل النقطة k_1 – وهي نقطة تقاطع s2 مع المسقط الأفقي ab للمستقيم – المسقط الأفقي لنقطة دخول المستقيم • وتمثل النقطة k_2 – وهي نقطة تقاطع s3 مع ab – المسقط الأفقي لنقطة خروج المستقيم • وبعد ذلك نحدد المساقط الأمامية k'_1 و k'_2 حسب أسس الاسقاط المتبعة •



شكل رقم (٢١٠)

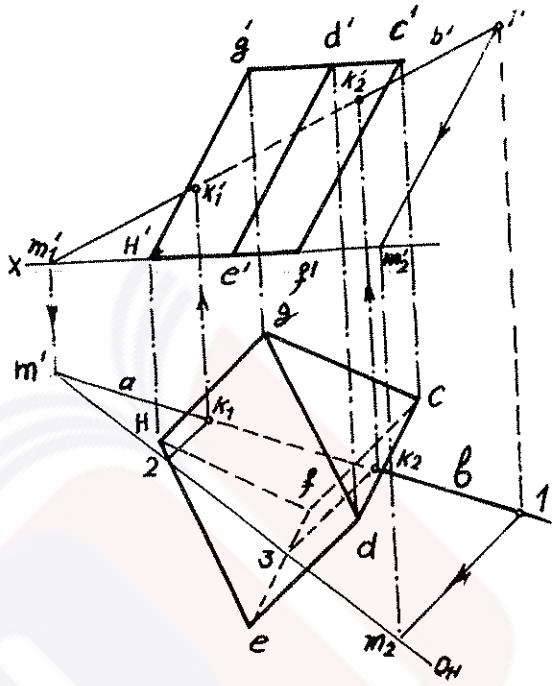
مثـــال ٣ :

حدد نقطتي دخول وخروج المستقيم AB المتقاطع مع الموشور الثلاثي C D E F G H (الشكل ٢١١) •

الحـــل :

اذا افترضنا أن الموشور المعني هرم قمته في مالانهاية أمكننا أن

نستخدم الطريقة المتبعة في المثال السابق ، وفي هذه الحالة يكون المستقيم المساعد الذي ينزل من قمة الهرم ويحدد المستوي Q مستقيما موازيا لأحرف الموشور . ولهذا الغرض نرسم من نقطة كيفية (1) على المستقيم AB (مسقطيها '1 و 1) مستقيما موازيا لأحرف الموشور (1 M) ، وبهذا يصبح المستوي Q محددا بمستقيمين متقاطعين ، هما AB و 1 M . من ثم نرسم أثره Q_h



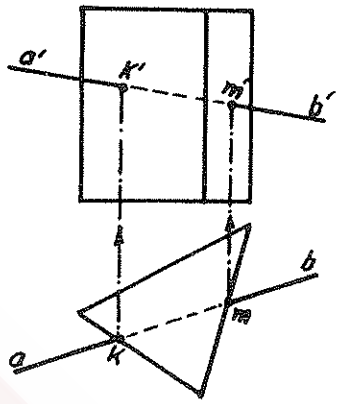
شكل رقم (٢١١)

(أيضا لأن قاعدة الموشور موازية للمستوي H) ، فنحصل على النقطتين 2 و 3 اللتين تنتميان الى خطي تقاطع المستوي مع الموشور الموازيين أيضا لأحرف الموشور . ولهذا نرسم من المسقطين الأفقيين 2 و 3 لهاتين النقطتين مستقيمين موازيين لأحد أحرف الموشور (أو موازيين للمستقيم 1m)، فيقطعان ab في k_1 و k_2 وهما المسقطان الأفقيان لنقطتي دخول المستقيم AB وخروجه . والطرق السابقة ذاتها تحدد مسقطيها الأماميين k'_1 و k'_2 .

في بعض الحالات الخاصة يمكن أن نحصل مباشرة على نقطتي دخول وخروج المستقيم المتقاطع مع الهرم أو الموشور .

لدينا في الشكل (٢١٢) المستقيم AB المتقاطع مع موشور ثلاثي قائم قاعدته موازية لمستوي الاسقاط الأفقي ، أي أن حوافه عمودية على المستوي H .

ولهذا نحصل مباشرة على المساقط الأفقية m و k ومن ثم نحدد المساقط الأمامية k' و m' وفق قواعد الاسقاط ٠



شكل رقم (٢١٢)

VII ـ٧ـ تقاطع الأجسام متعددات السطوح :

يمكن أن نرسم خطوط تقاطع متعددات السطوح باحدى الطريقتين التاليتين أو بكلتيهما حسب متطلبات تسهيل الحلول وتبسيطها :

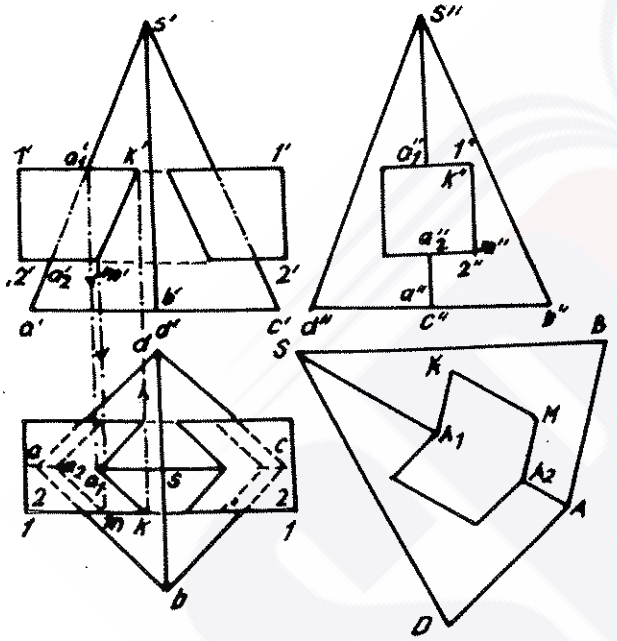
١ـ نحدد نقاط اختراق حروف (أضلاع) متعدد السطوح الأول لأوجه (لسطوح) متعدد السطوح الثاني ، ونحدد أيضا نقاط اختراق حروف متعدد السطوح الثاني لأوجه متعدد السطوح الأول ٠ ومن هذه النقاط المحددة نمرر ـ وفق تسلسل محدد بترتيب هذه النقاط بالنسبة للسطوح المتقاطعة ـ خطوط متكسرة تمثل خط تقاطع السطوح المعنية (ومن هذه النقاط المحددة يمكن أن نصل بين النقاط الواقعة في وجه واحد بخط مستقيم) ٠

ومن خلال ماذكرنا يمكن ملاحظة أن الطريقة المذكورة هي عبارة عن مجموعة مسائل تقاطع مستقيم مع مستو ٠

٢ـ نحدد خطوط تقاطع أوجه أحد متعددات السطوح مع أوجه متعدد السطوح الثاني ، وتمثل هذه الخطوط مفاصل الخط المتكسر الحاصل من تقاطع

الجسمين • وهنا أيضا يمكن ملاحظة أن الحل هو عبارة عن حل مجموعة مسائل تقاطع المستويات مع بعضها بعضا •

اذا كانت مساقط حرف أحد الأجسام المتعددة السطوح لاتتقاطع مع مسقط من مساقط أحد أوجه الجسم المتعدد السطوح الثاني ، فان هذا الحرف لايتقاطع مع الوجه المعني في الفراغ • ومن جهة أخرى لايعني تقاطع مساقط حرف جسم متعدد السطوح مع مساقط وجه (سطح) جسم متعدد السطوح ثاني أنهما متقاطعان في الفراغ •



شكل رقم (٢١٣)

مثـــال ١ :

ارسم خط تقاطع سطوح الهرم الرباعي المنتظم مع الموشور (الشكل ٢١٣) علما بأن قاعدة الهرم وقاعدتي الموشور توازي المستوي H •

الحـــل :

من خلال الشكل (٢١٣) يتضح لنا أن الموشور مغروز في جسم الهرم• ولذلك يمكن ايجاد خط التقاطع بالطريقة المتبعة في حل المثال الذي يوضحه الشكل (٢٠٣) ، (راجع VII ـ ٤) • وعلى هذا الأساس سنقتصر في حلنا هذا على طريقة ايجاد وتحديد النقاط A_1 و A_2 و K و M

والمستقيمات المحددة بها A_1K و A_2M و KM .

تقطع القاعدتان العليا والسفلى للموشور حرف الهرم SA في النقطتين A_1 و A_2 . ولما كانت هاتان القاعدتان موازيتان لقاعدة الهرم،فالمساقط a_1k و a_2m موازية لـ ab أيضا . وبتحديد المسقط الأفقي k من تقاطع a_1k مع مسقط الحرف $1-1$ يمكننا تحديد النقطة k' على $1'-1'$ ،ومنها نرسم $k'm'$ موازيا لـ $s'a'$، لأنهما مسقطان أماميان لجبهتي السطح $KM - SAB$ و SA ، فنحصل على m' من تقاطع $k'm'$ مع الحرف $2'-2'$، وبواسطتها نحدد m الواقعة على $2 - 2$ المنطبق على $1 - 1$.

في هذا الشكل تتضح لنا أيضا طريقة فتح وجهي الهرم SAB و SAD والثغرة الموجودة فيهما .

تتم عملية فتح هذه الأوجه باختيار نقطة كيفية تمثل قمة الهرم S ، ومنها نرسم المثلثين SAB و SAD بحيث تكون الحروف :

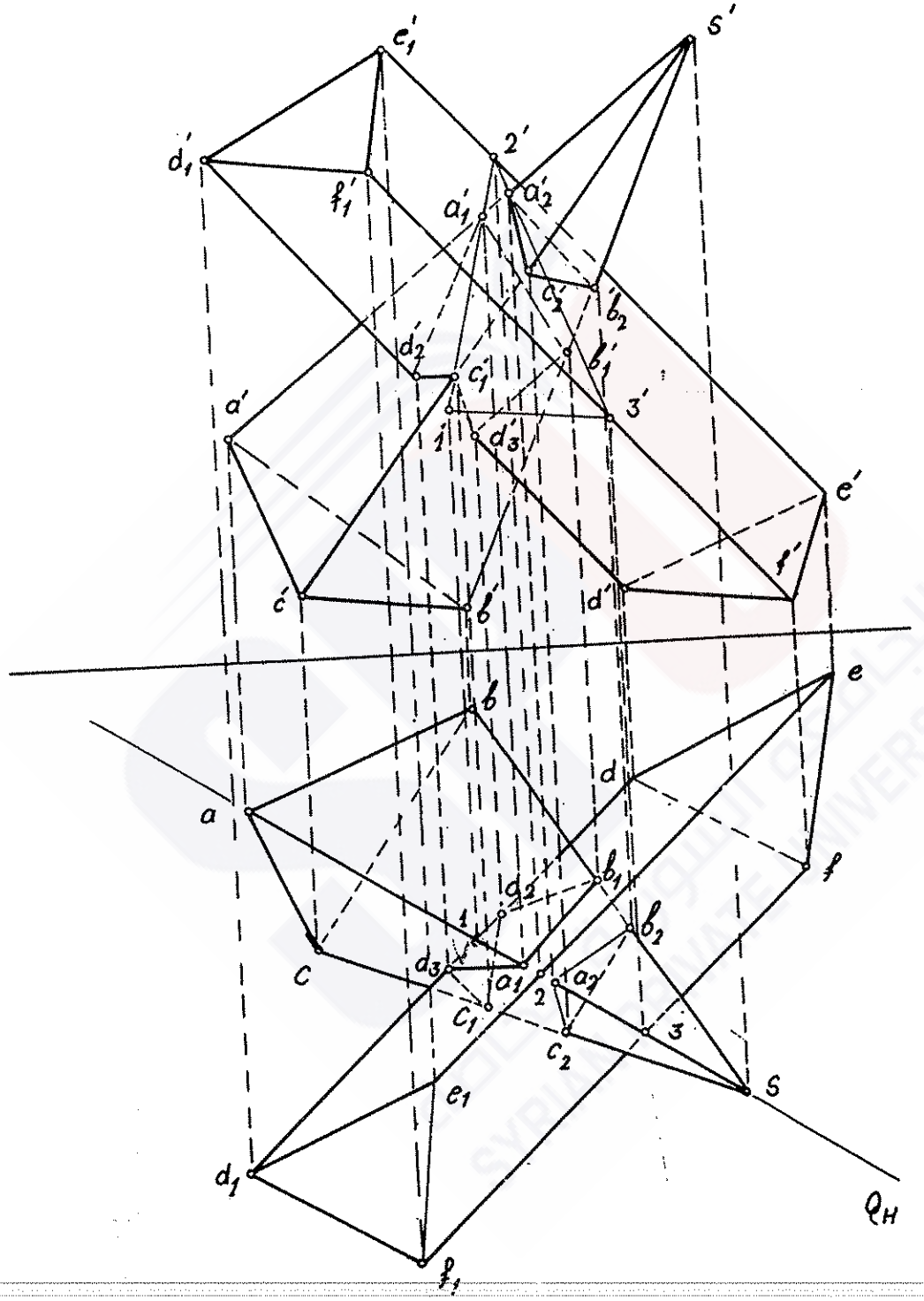
$s'a' = SD = SA = SB$ والحروف $BA = AD = ab = ad$.

وبعد ذلك نأخذ $s'a'_1 = SA_1$ و $s'a'_2 = SA_2$ ، ثم نرسم من النقطتين A_1 و A_2 في المثلث SAB مستقيمين موازيين للحرف AB ، ونحدد عليهما المسافات : $A_1K = A_2M = a_1k = a_2m$ ، وبعد ذلك نوصل K و M .

ونقوم من النقطتين A_1 و A_2 بالخطوات نفسها في المثلث SAD لاستكمال الشكل المطلوب .

مثـــال ٢ :

ارسم خطوط تقاطع سطوح الموشور الثلاثي $FE\ DF_1\ E_1D_1$ والهرم الثلاثي $SABC$ (الشكل ٢١٤) .


e'1
s'
d'1
2'
f'1
a'1
a'2
c'2
b'2
d'2
b'1
c'1
a'
3'
1'
d'3
e'
f'
c'
b'
d'
e
b
d
a
f
b1
a2
1
b2
c
d3
a1
a2
2
c1
3
c2
s
e1
d1
QH
f1

شكل رقم (٢١٤)

الحـــــل ١ :

للوصول الى الحل المطلوب نحدد نقاط تقاطع حروف أحد متعـــــــدد السطوح مع سطوح الجسم الثاني ومن ثم نحدد نقاط تقاطع حروف الثـاني مـع سطوح الأول • بكلمة أخرى نقول : نقوم بعمليات مكررة لحالة واحدة ، هـــي تقاطـــــع مستقيم مع جسم متعدد السطوح •

لذلك نأخذ أولا أحد حروف الهرم ، وليكن SA ، ونمرر منه مستويـــا مساعدا اسقاطيا أفقيا Q •

يتطابق المسقط الأفقي لسطح التقاطع بين الموشور والمستوي Q مـــع الأثر الأفقي للمستوي ، وفي هذه الحالة تمثل النقاط 1 و 2 و 3 المساقط الأفقية لنقاط تقاطع حروف الموشور DD_1 و EE_1 و FF_1 • ومن هـــذه المساقط نحدد ـ وفق أسس الاسقاط ـ المساقط الأمامية '1 و '2 و'3 لهذه النقاط وحين نصل بينها نحصل على المسقط الأمامي '1'2'3 لسطح التقاطع الذي يقع في مستو واحد مع حرف الهرم SA ، ولهذا تمثل النقطتان a'_1 و a'_2 المسقطين الأماميين لنقطتي دخول وخروج الحرف SA المتقاطع مـــع الموشور وبناء على ذلك اذا ماطبقنا قواعد الاسقاط نحصل على مسقطيهمـــا الأفقيين a_1 و a_2 •

وبالطريقة المذكورة ذاتها يمكننا الحصول على نقاط دخول وخـــروج الأحرف SB و SC ومساقطها الأمامية b'_1 و b'_2 و c'_1 و c'_2 ومساقطهـــا الأفقية b_1 و b_2 و c_1 و c_2 على التوالي •

وبعد ذلك نحدد بالطريقة السابقة ذاتها نقاط دخول وخروج حـــروف الموشور DD_1 و EE_1 و FF_1 المتقاطعة مع سطوح الهرم SABC ،وكمثال على ذلك نأخذ الحرف DD_1 ونمرر منه مستويا مساعدا اسقاطيا أفقيـــا

نستطيع بواسطته تحديد نقطتي دخول وخروج هذا الحرف D_2 و D_3 من سطوح الهرم المتقاطعة معه • وأما الحرفان EE_1 و FF_1 فنجد أنهما لايتقاطعان مع سطوح الهرم •

ولتجنب الخطأ أو الاشتباه به يفضل وضع جدول للأحرف والسطوح المتقاطعة ورموزها وتسلسل وصل بعضها ببعضها الاخر ، وكمثال على ذلك نأخذ المثال السابق :

الحرف المدروس	السطوح المتقاطعة مع الحرف المعني	نقطة تقاطع الحرف مع السطح	الوضع التسلسلي للنقطة المعنية في تسلسل توصيل النقاط •
SA	DEE_1D_1	A_1	١ ، ٦
	EFF_1E_1	A_2	I
الهرم SB	DEE_1D_1	B_1	٢
	EFF_1E_1	B_2	II
SC	DEE_1D_1	C_1	٤
	EFF_1E_1	C_2	III
DD_1	SCB	D_2	٣
	SAC	D_3	٥
الموشور EE_1	لايوجد	-	-
FF_1	لايوجد	-	-

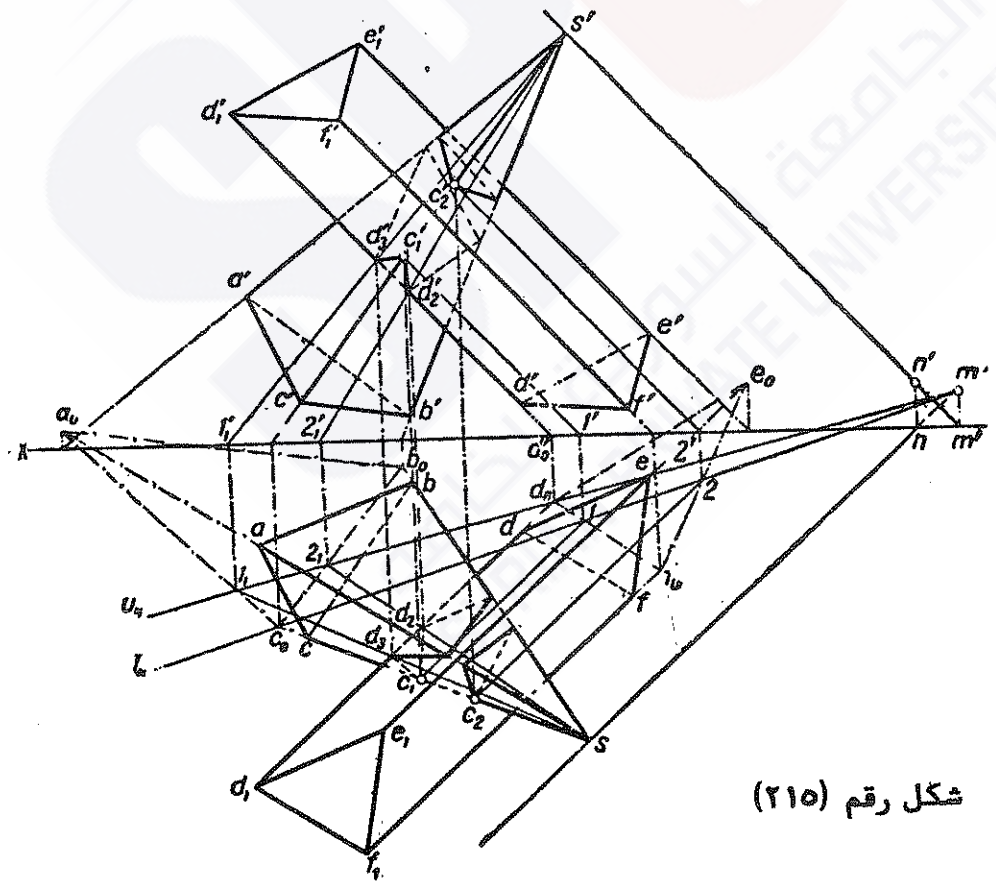
نحصل في المثال السابق على مقطعين (ينفصل أحدهما عن الآخر) من سطوح التقاطع التي تمثل سطوحا متعددة الزوايا ، ولتلافي الخلط بينهما

رمزنا لتسلسل توصيل نقاط أحد السطحين بالأرقام الهندية : ١ ، ٢، ٣، ٤، ٥ ٠ ولتسلسل الآخر بالأرقام اللاتينية : I وII و III ٠ وهذا يعني (كمثال نأخذ السطح الأول) أننا نصل بين نقاط المسقط الأفقي لهذا السطح وفق التسلسل التالي : النقطة a_I (١) توصل بالنقطة b_1 (٢) التي توصل بالنقطة d_2 (٣) التي توصل بالنقطة c_1 (٤) التي توصل بالنقطة d_3 (٥) التي توصل بالنقطة a_1 (٦) ، فيغلق محيط سطح التقاطع ٠

الحـــل ٢ :

نوضح في الشكل (٢١٥) طريقة أخرى لحل هذا المثال :

نمرر من قمة الهرم S مستقيما مساعدا موازيا لحروف الموشور ،وليكن



شكل رقم (٢١٥)

المستقيم SM ، فنلاحظ أن جميع المستويات المساعدة المارة من هـــــذا المستقيم والمتقاطعة مع الموشور $DEFD_1E_1F_1$ والهرم SABC تتقاطع مع سطوح الموشور بمستقيمات موازية لحروفه ومع سطوح الهرم بمستقيمات مارة من قمته ٠

تحدد تقاطع هذه المستقيمات (خطوط تقاطع المستوي المساعد مـــع الموشور وخطوط تقاطعه مع الهرم) النقاط المشتركة بين الموشور والهرم ، وبتعبير اخر نقول : يحدد نقاط تقاطعها مع بعضها بعضا ٠

مثـــال ٣ :

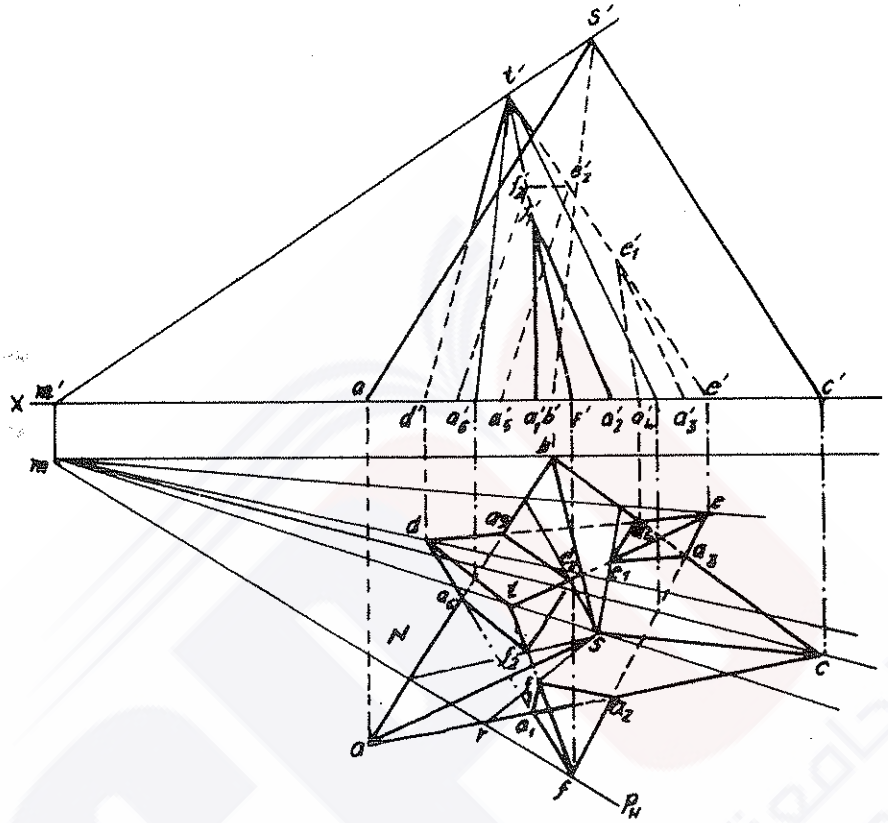
ارسم خطوط (سطوح) تقاطع هرمين ABCS و D E F T ٠

الحـــل :

يوضح الشكل (٢١٦) الحل المطلوب من خلال استخدام مستويـــات مساعدة مارة من قمتي الهرمين S و T ٠ ولهذا الغرض نمرر من القمتين S و T مستقيما ، ونحدد أثره الأفقي M ٠ ان أي مستو يمر من هـــذا المستقيم ST لابد أن يمر من قمتي الهرمين ويقطع سطوحهما بمستقيمـــات تمر من قممها ، وتمر الاثار الأفقية لهذه المستويات جميعهامن النقطة m ٠

نفترض أن المستقيم mf يمثل الأثر الأفقي لمستو مار من القمتين T و S ، ولذلك تمر بالضرورة من الحرف TF ، ونرمز لهذا الأثر P_h ٠

يقطع هذا المستوي المساعد P قاعدة الهرم SABC بالمستقيم MR واذا وصلنا ، في المسقط الأفقي ، القمة S بكل من النقطتين n و r فاننا نحصل على حدود مقطع الهرم المقطوع بواسطة المستوي P (الحـــاوي علـــى الحرف TF) ، وبالتالي نحصل على نقطتي f_1 و f_2 وهما المسقطـــان



شكل رقم (٢١٦)

الأفقيان دخول وخروج الحرف TF اذا ماتقاطع مع الهرم SABC • يتم ايجاد المساقط الأمامية لهاتين النقطتين وفق قواعد الاسقاط • وأما بقية الأوضاع فالجدول التالي يوضحها :

الحرف المدروس	السطوح المتقاطعة مع الحرف المعني	الحروف المتقاطعة مع الحرف المعني	نقاط التقاطع
TF	ACS	-	F_1
	ABS	-	F_2
TE	CBS	-	E_1
	ABS	-	E_2

الحرف المدروس	السطوح المتقاطعة مع الحرف المعني	الحروف المتقاطعة مع الحرف المعني	نقاط التقاطع
TD	لايوجد	لايوجد	–
FD	–	AC	A_1
	–	AB	A_4
FE	–	AC	A_2
	–	BC	A_3
DE	–	AB	A_5
	–	BC	A_6
AS	لايوجد	–	–
BS	لايوجد	–	–
CS	لايوجد	–	–

الفصل الثامن :

تغيير الوضع الإسقاطي للعنصر الهندسي الفراغي

* **مدخل :** انتقال وضع العنصر الهندسي من الحالة العامة الى الحالات الخاصة .

* **طريقة التدوير :**

دوران نقطة حول محور يعامد أحد مستويات الاسقاط .

تدوير مقطع مستقيم حول محور يعامد أحد مستويات الاسقاط .

تحديد طول مقطع مستقيم وزاوية ميله بالنسبة لمستويات الاسقاط .

التدوير الثنائي لمقطع مستقيم كيفي .

تدوير مستو حول محور يعامد أحد مستويات الاسقاط .

تحديد مسافة بين مستو ونقطة واقعة خارجه .

التدوير الانتقالي في الاسقاط المحدود والشامل .

تدوير المستوي حول أحد مستقيماته الخاصة .

التطابق كحالة خاصة بالتدوير .

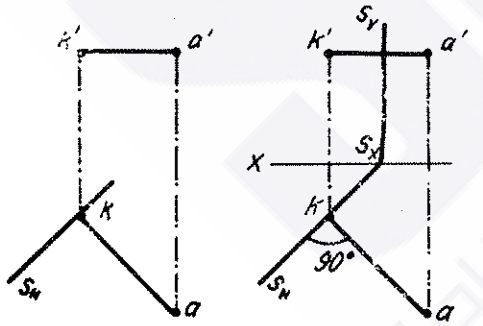
* **مستويات الاسقاط المساعدة :**

استبدال مستو اسقاطي أساسي واحد .

استبدال المجموعة الاسقاطية الأساسية كليا .

VIII ـ١ـ مدخل : انتقال وضع العنصر الهندسي من الحالة العامة الى الحالات الخاصة ٠

لاحظنا في الفصول السابقة أن بعض الحالات الخاصة لوضع العنصر الهندسي (النقط أو المستقيم أو المستوي) بالنسبة لمستويات الاسقاط تبسط كثيرا حل المسائل الهندسية وتسمح أحيانا الحصول على الحل مباشرة من الشكل المرسوم أو باجراء عمليات انشائية بسيطة ٠ مثلا : لتحديد المسافة بين النقطة A والمستوي الاسقاطي الأفقي S (الشكل ٢١٧) يكفي أن نرسم عمودا من المسقط الأفقي a للنقطة A على الأثر الأفقي S_h للمستوي S ، فيمثل المستقيم ak المسافة المطلوبة بين النقطة A والمستوي S ٠



شكل رقم (٢١٧)

ولحل المسائل التي تكون فيها العناصر الهندسية في حالتها العامة بطريقة مبسطة يمكننا اجراء بعض التحويرات أو التغييرات على الوضع الاسقاطي للعنصر الهندسي بحيث ننقل وضعه بالنسبة لمستويات الاسقاط من الحالة العامة الى احدى الحالات الخاصة التي تؤمن الحل المبسط المطلوب ٠ وهذا الانتقال يمكن تحقيقه باحدى

الطريقتين التاليتين :

أولا ـ تغيير الوضع الفراغي للعنصر الهندسي (أو لمجموعة العناصر الهندسية) بالنسبة لمستويات الاسقاط الثابتة بحيث يتخذ وضعا خاصا بالنسبة لها ، ويتم ذلك من خلال تدويره حول محور ما • وتسمى هذه الطريقة بطريقة التدوير •

ثانيا ـ استخدام مستويات الاسقاط المساعدة بحيث يكون الوضع الفراغي للعنصر الهندسي (أو لمجموعة العناصر الهندسية) بالنسبة لهذه المستويات في حالة خاصة بالرغم من ثبات وضعه الفراغي بالنسبة لمستويات الاسقاط الأساسية • هذه الطريقة تتم من خلال استبدال أحد مستويات الاسقاط الأساسية بمستو اسقاطي مساعد أو استبدال مجموعة الاسقاط الأساسية الثنائية بمجموعة اسقاط مساعدة على مرحلتين •

ندرس الآن بالتفصيل كل طريقة من هاتين الطريقتين •

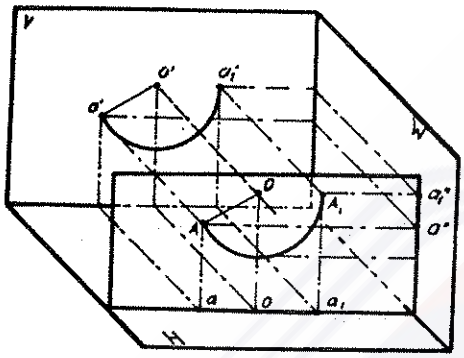
VIII ـ٢ـ طريقة التدوير :

عند التدوير حول محور ما ثابت (**محور التدوير**) تنتقل كل نقطة من العنصر الهندسي المدور ضمن مستو يعامد محور التدوير (**مستوي التدوير**) من موقع الى آخر على محيط دائرة يقع مركزها في نقطة تقاطع محور التدوير مع مستوي التدوير (**مركز التدوير**) ويساوي نصف قطرها البعد من النقطة المدارة الى مركز التدوير (**نصف قطر التدوير**) •

ولما كان محور التدوير ثابتا ، فان نقاط العنصر الهندسي (أو المجموعة الهندسية) الواقع على هذا المحور ثابتة غير متحركة عند التدوير حول هذا المحور •

يمكن للطالب أن يحدد محورالتدوير مسبقاأواختياريا • وفي كلا الحالتين يفضل أن يكون عموديا على أحد مستويات الاسقاط،ليبسط ذلك الحل كثيرا •

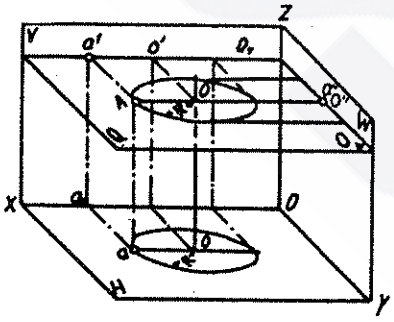
مثلا: اذا كان محور التدوير عموديا على مستوي الاسقاط الأمامي V (الشكل ٢١٨) فان مستوي التدوير سيكون موازيا له(للمستوي V)،ولذلك نجد أن مدار حركة النقاط المدورة يسقط على المستوى V دون تغييرأو تشويه •أما مسقطه الأفقي على مستوي الاسقاط الأفقي H فسيكون خطا مستقيما موازيا لخط الأرض وسيكون مسقطه الجانبي على مستوي الاسقاط الجانبي W خطا موازيا لمحور OZ (أو عموديا على محور OY)•



شكل رقم (٢١٨)

VIII-٢-١- دوران نقطة حول محور يعامد أحد مستويات الاسقاط :

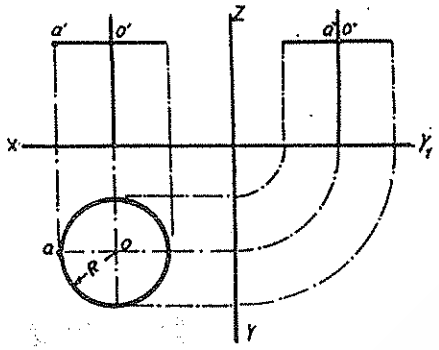
نفترض أن النقطة A (الشكل ٢١٩) تدور حول محور عمودي على مستوي الاسقاط الأفقي H • فمن أجل دراسة وضعها الفراغي خلال التدوير نمرر منها مستويا Q يعامد محور التدوير ، وبالتالي يوازي مستوي الاسقاط الأفقي H • وترسم النقطة A عند دورانها ضمن المستوي Q دائرة نصف قطرها R ، مقداره يساوي مقطع العمود المقام من النقطة A على



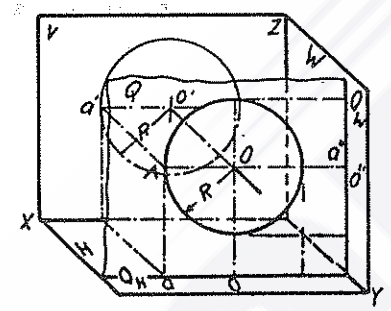
شكل رقم (٢١٩)

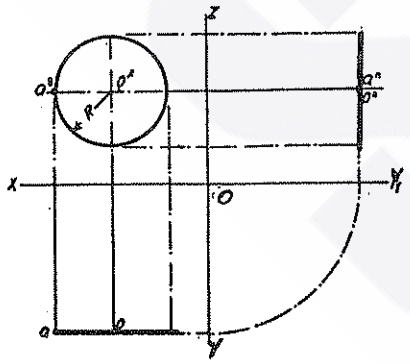
محور التدوير .

عند الاسقاط تسقط الدائرة الحاصلة من تدوير النقطة A دون تغيير أو تشويه على مستوي الاسقاط الأفقي H (الشكل ٢٢٠)،ولما كان المستوي Q هو مستو أفقي تطابقي فهو في الوقت نفسه مستو أفقي ثنائي (أمامي وجانبي)،ولهذا فان مساقط العناصر الهندسية التي تنتمي الى هذا المستوي على هذين المستويين (ومن ضمنها الدائرة المرسومة بالنقطة A) تقع على أثري المستوي الأمامي Q_V والجانبي Q_W ،ولهذا يمثلان مستقيمين موازيين لخط الأرض ومحور OY الواقع على امتداده . ومن المسقط الأفقي نستطيع أن نحدد قيمة نصف القطر R = oa ، ونرى أن طول كل من مسقطيها الأمامي والجانبي يساوي 2 R .



شكل رقم (٢٢٠)



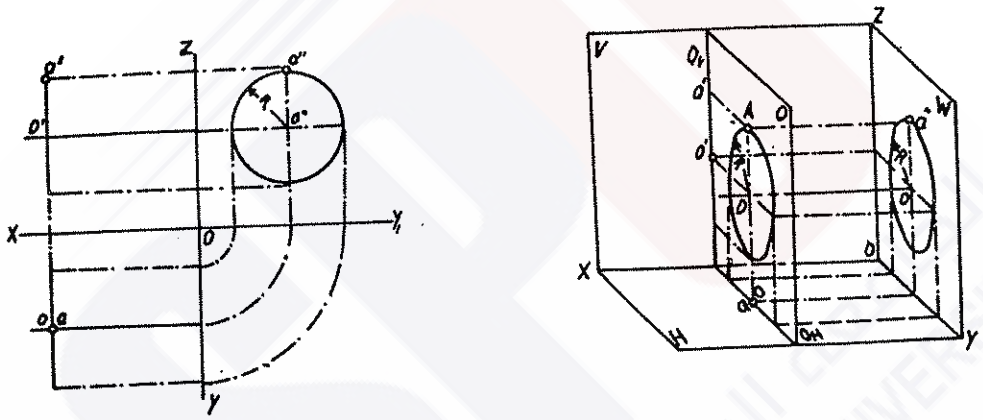


شكل رقم (٢٢١)

وعند تدوير النقطة A حول محور عمودي على مستوي الاسقاط الأمامي (الشكل ٢٢١) نرى أن الدائرة التي رسمت من دوران النقطة A وانتمت الى المستوي الاسقاطي الثنائي (أفقي وجانبي) Q تسقط دون أي تشويه أو تغيير على مستوي الاسقاط الأمامي،ويكون مسقطها الأمامي دائرة مركزها o' ونصف قطرها R = o'a' . وأما مسقطاها على مستوي الاسقاط الأفقي والجانبي فانهما يمثلان مستقيما طوله

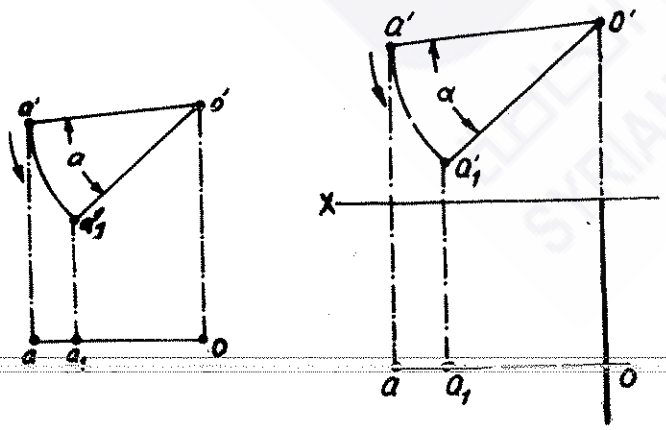
R 2 موازيا لكل من محاور الاسقاط OX و OZ .

أما الوضعية الحاصلة من تدوير النقطة A حول محور عمودي على مستوي الاسقاط الجانبي W فان الشكل (٢٢٢) يوضحها فراغيا واسقاطيا . ان الحالات المبينة في الأوضاع السابقة توصلنا الى الاستنتاج التالي : (**عند تدوير نقطة حول محور عمودي على أحد مستويات الاسقاط يمثل مسقطها على مستوي الاسقاط المتعامد مع محور التدوير محيط دائرة ، ويمثل كل من مسقطيها الآخرين مستقيما موازيا لأحد محاور الاسقاط**) .



شكل رقم (٢٢٢)

ومن التعبير العام ننتقل الى الأوضاع المحددة،فاذا كان لدينا المحور 0 0 العمودي على مستوي الاسقاط الأمامي V ولدينا النقطة A التي يعبر عنها مسقطاها (a ، a') والتي يطلب منا أن ندورها حول المحور المذكور بزاوية α ،وذلك باتجاه معاكس لاتجاه دوران عقرب الساعة(الشكل ٢٢٣) فاننا يجب أن نحصل ـ حسب القاعدة



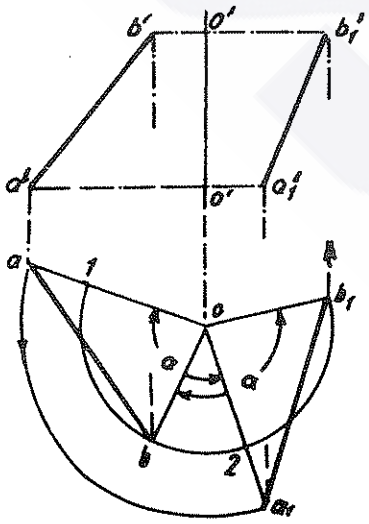
شكل رقم (٢٢٣)

السابقة ـ على مسقط أمامي لايشوه عملية التدوير • وهذا يعني أننا يجب أن ندور النقطة 'a بقوس يمثل نصف قطره المستقيم 'o'a وبزاوية مقدارها α في الاتجاه الذي يحدده الشكل • تمثل النقطة a_1' الحاصلة نيتجة هذا التدوير الوضع الجديد لمسقط A الأمامي • وأما مسقطها الأفقي في وضعها الجديد بعد التدوير فانه يتحدد أيضا وفق القاعدة المذكورة • يتحرك المسقط الأفقي بمسار أفقي (مواز لخط الأرض) عند تدوير النقطة ولما كان المسقطين الأمامي والأفقي يقعان على خط تداع (شاقولي) واحد فان المسقط الأفقي الجديد a_1 يتحدد من تقاطع خط التداعي النازل من a_1' مع المسار(المستقيم) الأفقي الحاصل من حركة النقطة الدائرة في مسقطها على المستوي H •

VIII-٢-٢- تدوير مقطع مستقيم حول محور يعامد مستوي الاسقاط :

لدينا مقطع للمستقيم AB محدد بمسقطيه الأفقي (ab) والأمامي ('a'b)والمطلوب أن ندوره حول المحور 00 العمودي على مستوي الاسقاط الأفقي H باتجاه دوران عقرب الساعة بزاوية مقدارها α •

لتحديد وضعية مقطع المستقيم AB الجديدة ، أي ايجاد مساقطه عند هذه الوضعية ، يكفي أن نحدد وضعية نقطتين من نقاطه مثل A و B (الشكل ٢٢٤) • ولهذا الغرض نتبع الخطوات التالية :



شكل رقم (٢٢٤)

١ـ من المسقط الأفقي لمركزالدوران 0

نرسم بنصف قطر مقداره oa قوسا باتجاه دوران عقرب الساعة وبزاوية مركزية مقدارها α ، فنحصل على المسقط الأفقي للوضع الجديد للنقطة A ، وهو (a_1) ٠

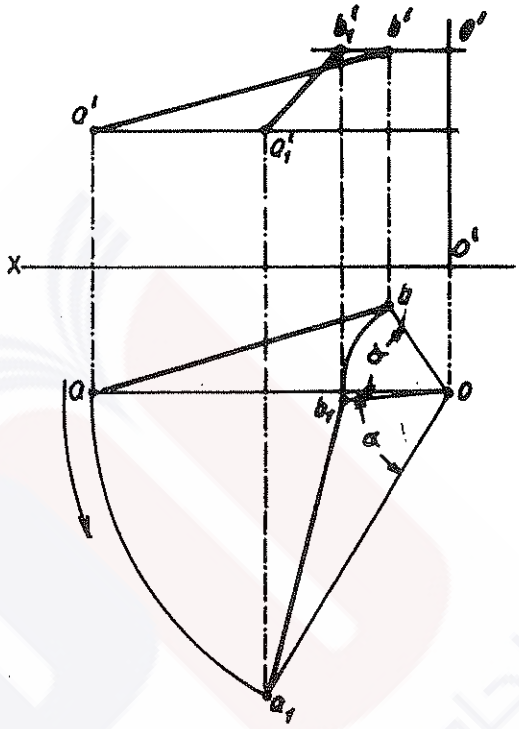
٢ـ وبالطريقة نفسها نحدد بنصف قطر مقداره ob الموضع الجديد للمسقط الأفقي b_1 للنقطة B ، ونلاحظ في هذا المجال من خلال الشكل السابق أن القوس $b\ b_1$ يساوي القوس 2-1 (لماذا ؟) ٠

١ـ نمرر من النقطتين 'a و 'b في المسقط الأمامي مستقيمين عموديين على 'o'o (أفقيين) ، فيقع على هذين المستقيمين المسقطان الأماميان a'_1 و b'_1 للوضعية الجديدة للنقطتين A و B، ونحصل على a'_1 و b'_1 من تقاطع هذين المستقيمين مع خطي التداعي الشاقوليين المقامين من النقطتين a_1 و b_1 على التوالي ٠

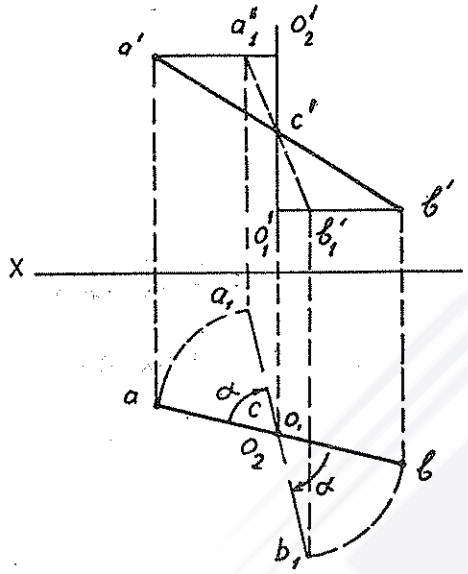
ندرس الآن العلاقة بين المسقطين الأفقيين للمستقيم AB في وضعيته قبل التدوير ab وبعده $a_1\ b_1$: من خلال الشكل (٢٢٤) نلاحظ أن لدينا في المثلثين oab و oa_1b_1 : $oa_1 = oa$ و $ob_1 = ob$ لأنها أنصاف أقطار واحدة ، و $\measuredangle a_1ob_1 = \measuredangle aob$ ، ولذلك يكون المستويان متساويين ، ويعني هذا أن $a_1b_1 = ab$ أي أن المسقطين الأفقيين متساويان ٠

لدينا في الشكل (٢٢٥) مثال آخر لتدوير المستقيم AB بزاوية α باتجاه معاكس لدوران عقرب الساعة ، ولايجاد مساقط الوضعية الجديدة نتبع الخطوات السابقة نفسها ٠ وبخصوص العلاقة المتبادلة بين المسقطين ألافقيين لمقطع المستقيم في وضعه قبل التدوير وبعده نلاحظ هنا أيضا أن المثلثين oab و oa_1b_1 متساويان لأن $\measuredangle b_1oa_1 = \measuredangle boa$ و $ob_1 = ob$ و $oa_1 = oa$ على أساس أنهما أنصاف أقطار قوس واحد ٠ ولهذا نجد أن

$a_1b_1 = ab$ ، أي أن المسقطين الأفقيين متساويان ٠



شكل رقم (٢٢٥)



شكل رقم (٢٢٦)

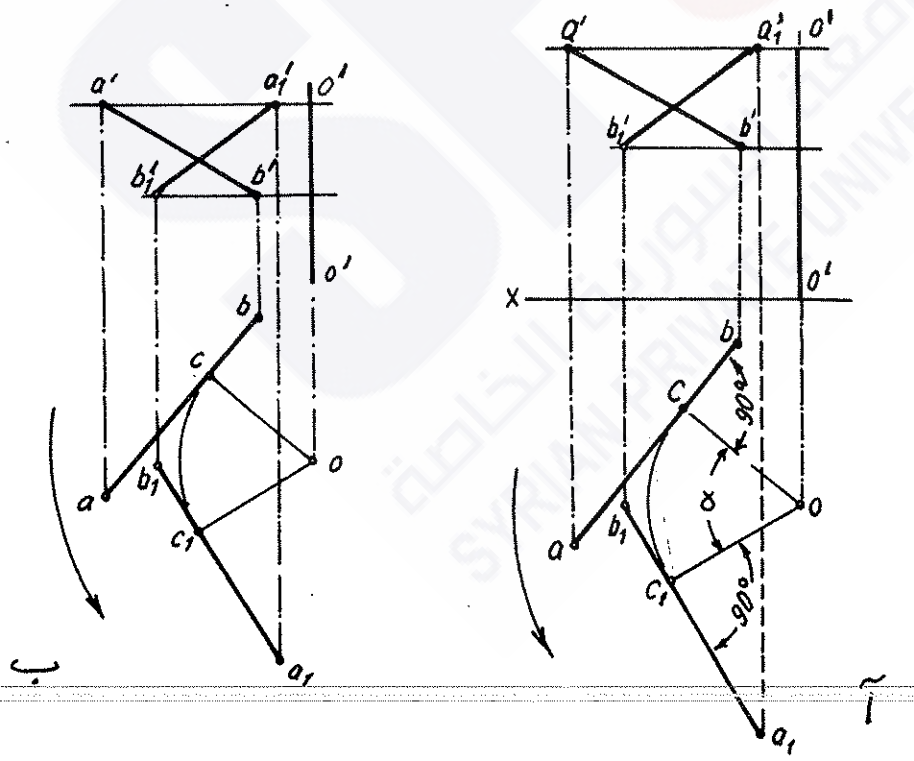
لدينا في الشكل (٢٢٦) مثال آخر لتدوير مقطع المستقيم AB على محور عمودي على مستوي الاسقاط الأفقي بزاوية α وباتجاه دوران عقرب الساعة، الا أن محور الدوران هنا يمر من أحد نقاط المستقيم ، وهي النقطة C ، ولذلك ستكون هذه النقطة ثابتة ٠

نتبع في تحديد مساقط مقطع المستقيم في وضعيته الجديدة بعد التدوير الخطوات السابقة نفسها ، الا أن نصف قطر التدوير في هذه الحالة سيكون ca و cb ٠ وأما تحديد العلاقة بين المسقطين الأفقيين لمقطع المستقيم قبل التدوير وبعده فهو يتم من خلال الشكل (٢٢٦) الذي يوضح أن $a_1c = ac$ و $cb_1 = cb$ على أساس أنها أنصاف أقطار قوس واحد ٠ وحين نجمع طرفي المتساويتين نحصل على $a_1c + cb_1 = ac + cb$ ، ويعني هذا أن

$a_1b_1 = ab$ ، أي أن المسقطين الأفقيين متساويان •

تدل الأمثلة السابقة على أن تساوي المسقطين الأفقيين في هذه الأمثلة ليس مصادفة بل قاعدة عامة توُصلنُا الى الاستنتاج التالي : **(ان المسافة بين المساقط على مستوي الاسقاط الذي يعامد محور التدوير للنقاط المدورة باتجاه واحد وبزاوية واحدة حول هذا المحور ثابتة لاتتغير)** • هذه القاعدة العامة يمكن أن تصاغ مرة أخرى ، فنقول : **(أن طول المساقط على مستوي الاسقاط الذي يعامد محور التدوير لمقطع مستقيم مدور حول هذا المحور قبل التدوير وبعده يبقى ثابتا)** •

ان هذا الاستنتاج يتيح لنا أن نستخدم طريقة أخرى لانشاء المسقط الجديد لمقطع المستقيم المدور حول محور معين وبزاوية محددة • وتتم هذه الطريقة وفق الخطوات التالية التي يوضحها الشكل (٢٢٧) •



شكل رقم (٢٢٧)، آ ـ الاسقاط المحدود• ب ـ الاسقاط الشامل •

١ـ من النقطة o نقيم عمودا على ab ، فيقطعه في c .

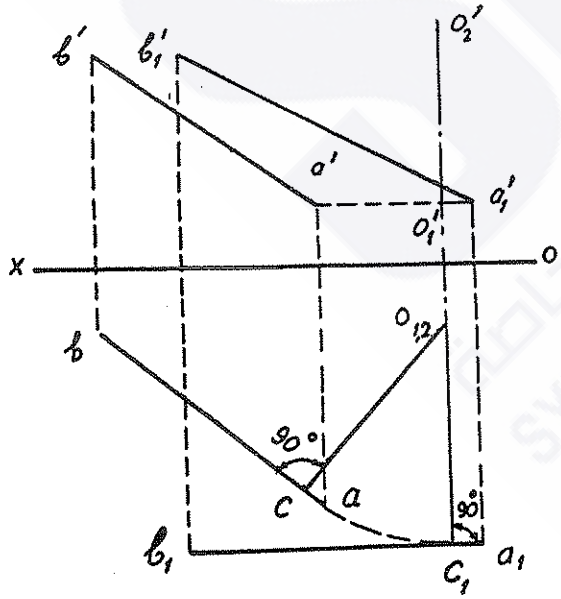
٢ـ نرسم قوسا بنصف قطر oc وبزاوية α ، فنحدد c_1 .

٣ـ نقيم من c_1 عمودا على oc_1 ، فيمثل المسقط الجديد للمستقيم المعني .

٤ـ وحسب الاستنتاج السابق نحدد على المستقيم الجديد المسافات $c_1a_1 = ca$ و $c_1b_1 = cb$ ، وبهذا نحصل على المسقط الأفقي a_1b_1 للمستقيم AB في وضعه الجديد .

نوجد المسقطين الأماميين للنقطتين A و B (a'_1) و (b'_1) بالطريقة التي توضحها الحالات السابقة ، ومن ثم نوصل بينهما فنحصل على المسقط الأمامي $a'_1b'_1$ للمستقيم AB في وضعيته الجديدة .

بهذه الطريقة يمكن أيضا تحديد قيمة الزاوية التي يجب تدوير المستقيم بها ، ليتخذ وضعا معينا (خالة خاصة) ومحددا . **مثلا : اذا كان** لدينا المستقيم AB المحدد بمسقطيه الأفقي والأمامي ، وكان المطلوب أن نحدد الزاوية التي يجب تدويره بها ، ليوازي مستوي الاسقاط الامامي ، فان الحل هو : نقيم من مركز التدوير o_{12} عمودا على المسقط الأفقي ab (الشكل ٢٢٨) فيقطعه في نقطة c .



شكل رقم (٢٢٨)

ولما كان في حالة المستقيم

الأمامي ، أي الموازي لمستوي الاسقاط الأمامي ، فان المسقط الأفقي يكون مستقيما موازيا لخط الأرض ox ، ولذا يجب أن يكون العمود المقام عليه من مركز التدوير مستقيما شاقوليا ، ولذلك نرسم قوسا نصف قطره $o_{12}c$ حتى يتخذ نصف القطر هذا وضعا شاقوليا في $o_{12}\ c_1$ (الشكل ٢٢٨)، ونرسم العمود على $o_{12}c_1$ في c_1 ، ونحدد المسافات $ca = c_1a_1$ و $cb = c_1b_1$ فنحصل على المسقط الأفقي للمستقيم AB في وضعه الجديد الموازي لمستوي الاسقاط الأمامي • وبالطرق السابقة نفسها نوجد المسقط الأمامي الجديد $a'_1\ b'_1$، ومن الشكل نفسه نجد أن المستقيم AB يجب أن يدور حول محور التدوير $0_2 - 0_1$ العمودي على مستوي الاسقاط الأفقي بزاوية مقدارها $co_{12}c_1$ ∠، ليصبح مستقيما أماميا •

VIII-٢-٣- تحديد طول مقطع مستقيم وزاوية ميله بالنسبة لمستويات الاسقاط بطريقة التدوير :

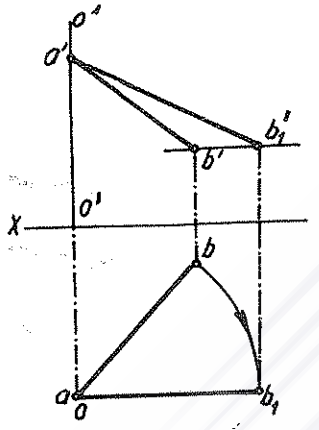
يمكننا - كما ذكرنا سابقا - من تدوير مقطع مستقيم كيفي ، أي في حالة عامة ، أن نحصل على وضع خاص به ، هو أن يوازي أحد مستويات الاسقاط ، وبهذا نحصل من الاسقاط مباشرة على طول مقطع المستقيم هذا وزاوية ميله بالنسبة لمستويات الاسقاط الأخرى •

اذا أخذنا محور التدوير مارا باحدى نهايتي مقطع المستقيم فاننا سنتوصل الى تسهيل الحل مرة أخرى ، لأن هذه النقطة ستكون ثابتة مع المحور ، ولذلك نحتاج لايجاد الموضع الجديد الى نقطة واحدة أخرى يمكن ، بل يحبذ ، أن تكون النهاية الثانية لمقطع المستقيم (الشكل ٢٢٩) •

مثال : أوجد طول مقطع المستقيم AB المحدد بمسقطيه الأفقي والأمامي •

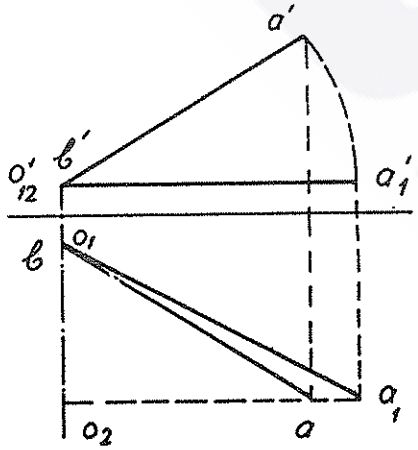
لمعرفة طول هذا المقطع يكفي أن نجعله موازيا لأحد مستويات الاسقاط، فيعبر حينئذ مسقطه على مستوي الاسقاط هذا عن طوله وعن وضعه بالنسبة لمستويات الاسقاط الأخرى .

على هذا الأساس يمكن تغيير وضع المستقيم AB من الحالة العامة الى وضع خاص ، كأن يكون مستقيما أماميا ، وعلى هذا الأساس لابد أن يكون مسقطه الأفقي موازيا لخط الأرض .



شكل رقم (٢٢٩)

ولتنفيذا هذا نستخدم طريقة التعبير التي يوضحها الشكل (٢٢٩) : نقوم بتدوير المستقيم AB حول محور عمودي على مستوي الاسقاط الأفقي ولتبسيط الحل يمكن أن نختار موقع محور الدوران بحيث يمر من أحد نقاط المستقيم ، ولتكن النقطة A ، ولهذا تكون هذه النقطة ثابتة ، وبالتالي يكفي تدوير النقطة B (وليكن باتجاه دوران عقرب الساعة) حتى يأخذ المستقيم AB وضعا موازيا للمستوي V ، ويتم التعبير عن ذلك من خلال تدوير المسقط الأفقي b بنصف قطر ab حتى تأخذ النقطة b وضعا أفقيا واحدا مع النقطة a ، وهو الوضع b_1 . ومن ثم نوجد b'_1 من تقاطع خط التداعي الشاقولي المقام من b_1 مع الخط الأفقي المرسوم من b' . يمثل المستقيم الواصل بين a' و b'_1 المسقط الأمامي $a'b'_1$



شكل رقم (٢٣٠)

للمستقيم AB في وضعه الموازي لمستوي الاسقاط الأمامي والذي يعبر عن طوله الحقيقي وميله الحقيقي بالنسبة لمستويات الاسقاط .

في الشكل (٢٣٠) يتم حل المسألة من خلال تدوير المستقيم AB حول محور عمودي على مستوي الاسقاط الأمامي مار من النقطة B حتى يتخذ وضع مستقيم أفقي ، أي مواز لمستوي الاسقاط الأفقي . ولما كان محور التدوير يمر من النقطة B فانها تبقى ثابتة . ولهذا يكفي تدوير النقطة 'a حول مركز التدوير o'_{12} حتى تتخذ وضعا أفقيا واحدا مع النقطة 'b وهو الوضع a'_1 (الشكل ٢٣٠) . وبعد ذلك نوجد المسقط الأفقي a_1 للوضع الجديد للنقطة A وبالوصل بين a_1 و b نحصل على المسقط الأفقي a_1b للوضعية الجديدة للمستقيم AB بعد التدوير والتي يكون فيها المستقيم أفقيا . لهذا نجد أن a_1b يعبر عن الطول الحقيقي للمستقيم AB وميله الحقيقي بالنسبة لمستويات الاسقاط .

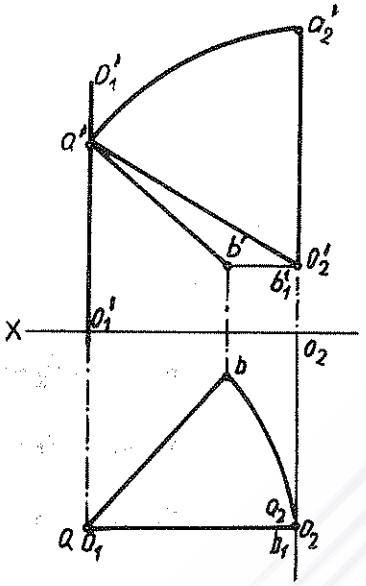
VIII-٢-٤- التدوير الثنائي لمقطع مستقيم كيفي :

لايمكننا أحيانا الحصول على الوضعية الخاصة المطلوبة لمقطع المستقيم الكيفي (الحالة العامة) في الفراغ من خلال تدويره حول محور عمودي على أحد مستويات الاسقاط . ولهذا يجب أن نقوم بالتدوير على مرحلتين ، الأولى للانتقال الى وضع خاص وسيط والثانية للانتقال الى الوضعية الخاصة المطلوبة.

مثال : لدينا المستقيم الكيفي AB المحدد بمسقطيه الأفقي والأمامي .
المطلوب أن ندوره بحيث يصبح عموديا على مستوي الاسقاط الأفقي .

الحل : حتى يصبح المستقيم AB عموديا على مستوي الاسقاط الأفقي ، لابد أن يكون موازيا لمستوي الاسقاط الأمامي . لذلك يجب أولا تدوير المستقيم

الكيـــفي AB بحيث يصبح موازيا لمستوي الاسقاط الأمامي • لهذا الغرض نقـــوم بتدويره حول محور التدوير 0_1-0_1 (الشكل ٢٣١) المار من النقطة A والعمودي علـى مستوي الاسقاط الأفقي حتى يتخذ موضـــع مستقيم أمامي • بعد ذلك نقوم بتدويـــر المستقيم في وضعيته الجديدة AB_1 حـــول محور التدوير 0_2-0_2 المار من النقطة B_1 والعمودي على مستوي الاسقاط الأمامي ، حتى يتخذ الوضعية العمودية على المستوي الأفقي •



شكل رقم (٢٣١)

هذه العمليات تتم في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي باجراء الخطـــوات التالية :

١ـ نرسم بنصف قطر مقداره ab من مركز التدوير o_1 المنطبق علـى a قوسا نحدد به النقطة b_1 بحيث يكون ab_1 موازيا لخط الأرض •

٢ـ نوجد المسقط الأمامي للنقطة B في موضعها الجديد ، أي (b_1') ، ونوصل بين النقطتين a' و b_1' فنحصل على المسقط الأمـــامي $a'b_1'$ لوضعية المستقيم الجديدة الموازية لمستوي الاسقاط الأمامي •

٣ـ نرسم بنصف قطر مقداره $a_1'b_1'$ من مركز التدوير o_2' المنطبق عـــلى b_1' قوسا نحدد به النقطة a_1' بحيث تكون على شاقول واحد على خـــط الأرض مع النقطة b_1' ، ويمثل a_1' b_1' المسقط الأمامي للوضعية الجديدة للمستقيم AB ، وهي الوضعية المطلوبة ، أي يكون عموديا عـــــلى مستوي الاسقاط الأمامي •

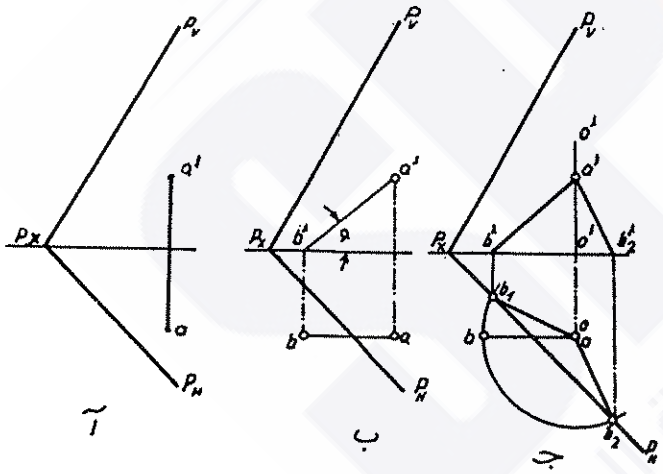
٤ـ ينطبق المسقط الأفقي a_1 على b_1 ، فينطبق المسقط الأفقي للمستقيم على نقطة أثره الأفقي .

مثال ٢ : المطلوب أن نمرر مستقيما ينتمي الى المستوي P من النقطة A التي تنتمي الى هذا المستوي (الشكل ٢٣٢ آ) ويميل بزاوية α عن مستوي الاسقاط الأفقي H .

الحل :

١ـ اذا كان المستقيم أماميا ، اي موازيا لمستوي الاسقاط الأمامي V ، فان الزاوية المحصورة بين مسقطه الأمامي وخط الأرض OX تمثل زاوية ميله الحقيقي عن مستوي الاسقاط الأفقي H .

٢ـ لهذا السبب نرسم من النقطة a' يميل بزاوية α عن خط الأرض OX ، ويقطعه في نقطة b' ، ويمثل المستقيم a'b' المسقط الأمامي لمستقيم أمامي يميل بزاوية α عن مستوي الاسقاط الأفقي H (الشكل ٢٣٢ ب) .



شكل رقم (٢٣٢)

٣ـ يكون المسقط الأفقي لهذا المستقيم موازيا لخط الأرض ولهذا تحدد النقطة b (التي تمثل الأثر الأفقي للمستقيم AB في الوقت نفسه) من تقاطع العمود المقام على خط الأرض من نقطة b' مع المستقيم الأفقي المرسوم من النقطة a .

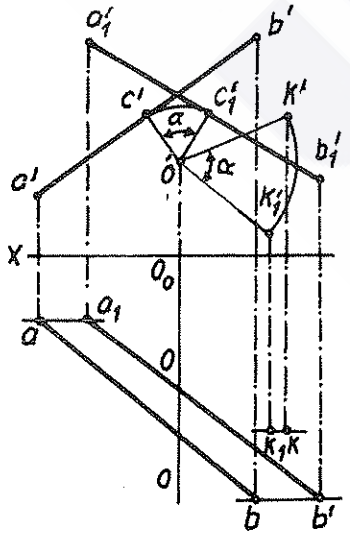
٤ـ من خلال الشكل يتبين لنا أن المستقيم AB لايحقق شرط انتمائه الى المستوي P لأن أثره الأفقي لايقع على الأثر الأفقي P_h للمستوي • ولذلك يجب تدويره حتى يقع أثره الأفقي على أثر المستوي P_h ، وحتى لاتتغير زاوية ميله عن المستوي H لابد أن يدور حول محور عمودي على مستوي الاسقاط الأفقي •

٥ـ لأجل ذلك ندّور المستقيم AB حول محور يعامد المستوي H(0-0) ويمر من النقطة A حتى تقع النقطة B على الأثر الأفقي P_h للمستوي P وبذلك نحصل على النقطة المطلوبة •

من خلال الشكل (٢٣٢ج) نلاحظ أن للمسألة حلّين عندما تكون الزاوية المحددة α أصغر من زاوية ميل المستوي P نفسه بالنسبة لمستوي الاسقاط الأفقي • وعندما تساوي الزاوية α زاوية ميل المستوي P تصبح المسألة ذات حل وحيد •

VIII ـ ٢ ـ ٥ ـ تدوير مستو حول محور يعامد مستوي الاسقاط :

اذا كان المستوي محددا بمستقيم ونقطة (الشكل (٢٣٣) أو بمستقيمين ، فان تدويره حول محور عمودي على مستوي الاسقاط وبزاوية محددة يتم بتدوير النقطة والمستقيم كليهما حول المحور المذكور بنفس الاتجاه المحدد والزاوية المحددة ، وفق الأسس والخطوات المذكورة في الفقرات السابقة من هذا الفصل ، وتمثل الوضعية



شكل رقم (٢٣٣)

الجديدة للمستقيم والنقطة الوضع الجديد المطلوب للمستوي ٠

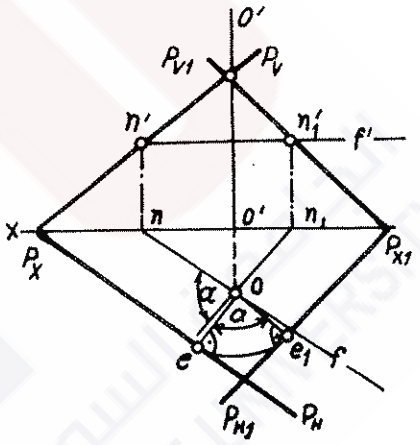
أما اذا كان المستوي محددا بأثريه P_v و P_h وكان المطلوب أن نُـدّوره حول محور عمودي على مستوي الاسقاط ، فاننا نفترض أن المطلوب تدويـره حول محور 0-0 عمودي على مستوي الاسقاط الأفقي H بزاوية α باتجاه معاكس لدوران عقرب الساعة ٠

لتحقيق ذلك نتبع الخطوات التالية :

١ـ نقيم من مركز الدوران o (في المسقط الأفقي) عمودا على الأثر الأفـقي P_h للمستوي P فيقطعه في نقطـة e (الشكل ٢٣٤) ٠

٢ـ ندور النقطة e حول المركـز o بالزاوية والاتجاه المطلوبين فنحصـل على النقطة e_1 ٠

٣ـ نقيم من e_1 عمودا على oe_1 فنحصـل على الأثر الأفقي P_{h1} للمستوي P في وضعه الجديد وهذا الأثر الأفقي الجديد



شكل رقم (٢٣٤)

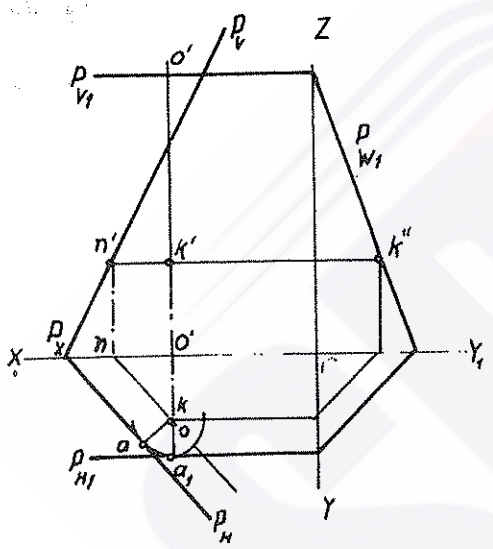
P_{h1} يقطع خط الأرض في النقطة P_{x1} ٠

٤ـ لايجاد الأثر الأمامي للمستوي في وضعيته الجديدة بعد تحديد النقطـة P_{x1} يكفي ايجاد نقطة واحدة أخرى واقعة على هذا الأثر ٠

٥ـ لايجاد هذه النقطة نختار في المستوي P مستقيما أفقيا NF (nf,n'f') متقاطعا مع محور الدوران 0-0 ٠ ولما كان المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي في المستوي موازيا لأثر المستوي الأفقي ، يكفي أن نرسم مستقيما

f_1 n_1 مارا بنقطة o ويوازي الوضعية الجديدة للأثر الأفقي للمستوي P_{h1} ، وبذلك نحصل على المسقط الأفقي للأثر الأمامي لهذا المستقيم الأفقي • وحسب أسس التدوير سيبقى المسقط الأمامي للنقطة المدورة على نفس استقامة الوضع الأول لهذا المسقط ، ولذا يصبح من الممكن تحديد الأثر الأمامي (ومسقطه الأمامي المنطبق عليه) لهذا المستقيم وهو النقطة n_1' •

٦ـ بالوصل بين النقطتين n_1' و P_{x1} نحصل على الأثر الأمامي P_{v1} للمستوي في وضعيته الجديدة •



شكل رقم (٢٣٥)

ولكن في بعض حالات التدوير يتخذ المستوي في وضعيته الجديدة وضعا موازيا لخط الأرض • وفي هذه الحالة يصبح ايجاد الأثر الأمامي للوضعية الجديدة للمستقيم الأفقي أمرا مستحيلا ، لأن أفق المستوي الموازي لخط الأرض (وهو يمثل جبهة المستوي في الوقت نفسه) يكون ذا أثر وحيد هو أثره على مستوي الاسقاط الجانبي W ، أي الأثر الجانبي وحده • ولما كان المستوي المعني بعد التدوير يتخذ وضعا اسقاطيا جانبيا فان المساقط الجانبية لجميع النقاط الواقعة فيه تتطابق مع أثره الجانبي (تقع عليه) • ولهذا يمكن أن نختار احدى النقاط التي تنتمي الى المستوي P (الشكل ٢٣٥)، ثم نوجد مسقطها الجانبي بعد التدوير •

في مثل هذه الحالة يفضل اختيار نقطة منتمية الى المستوي ثابتة خلال

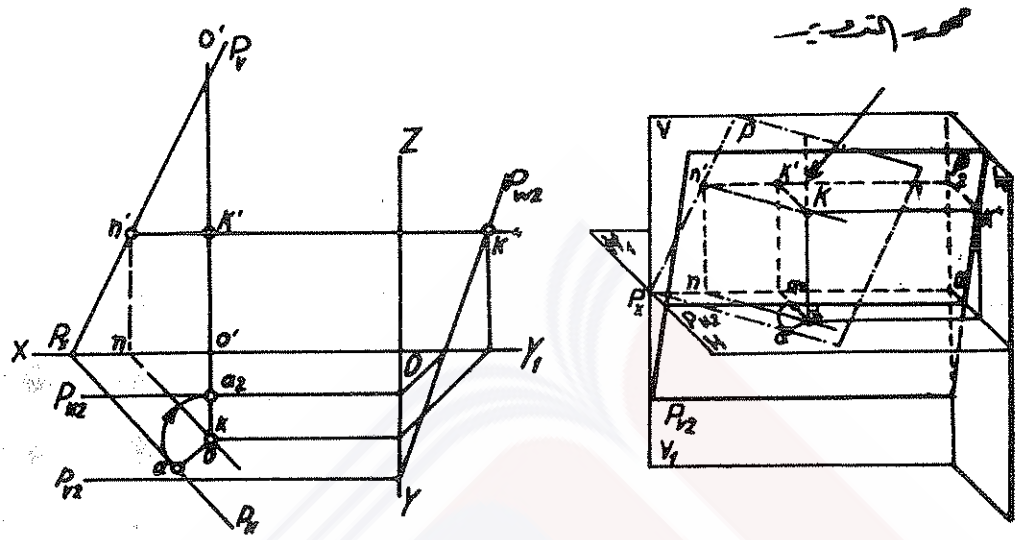
عملية التدوير،أي واقعة على محور التدوير في الوقت نفسه،مثل النقطة K (الشكل ٢٣٥) وبذلك يبقى مسقطها الجانبي في موقعه دون تغيير. لتحديد مساقط النقطة K (k,k',k") نستخدم أفق المستوي NK المار من هذه النقطة .

نقيم من مركز التدوير o في المستوي H عمودا oa على الأثر الأفقي P_h للمستوي. ويجب أن يتخذ مقطع العمود هذا بعد التدوير وضعا يصبح فيه الأثر الأفقي موازيا لخط الأرض OX . وهذا يعني أن هذا المقطع يجب أن يكون عموديا على OX وعلى الأثر الأفقي P_{h1} للمستوي في وضعيته الجديدة. نحصل على هذه الوضعية عندما يكون الأثر الأفقي الجديد P_{h1}،المار من النقطة a_1 ، عموديا على المقطع oa_1 .

ولما كان المستوي بعد التدوير يمر أيضا من النقطة K (لأنها منتمية اليه)،يصبح في هذه الحالة مستويا اسقاطيا جانبيا. ولذلك يقع مسقط النقطة الجانبي "k على الأثر الجانبي P_{w1} للمستوي في وضعه الجديد.على هذا الأساس يتحدد الأثر الجانبي P_{w1} بواسطة P_{h1} والنقطة "k . بعد ذلك يصبح تحديد الأثر الأمامي P_{v1} لهذا المستوي في وضعه الجديد سهلا جدا ، فنرسم من نقطة تقاطع P_{w1} مع محور OZ في المستوي V مستقيما موازيا لخط الأرض OX يمثل الأثر P_{v1}.

ان الشكل (٢٣٦) يوضح في التعبير الفراغي والاسقاطي طريقة ثانية لحل المسألة السابقة وذلك بتدوير النقطة a حول المحور o باتجاه دوران عقرب الساعة . ان خطوات الحل في هذه الطريقة تماثل الحالة السابقة: نحدد أولا P_{h2} و P_{w2} وأخير نحدد الأثر P_{v2}.

اذا كان محور التدوير واقعا في أحد مستويات الاسقاط ، فان تمثيل تدوير مستو ما حول هذا المحور يصبح أكثر بساطة .



شكل رقم (٢٣٦)

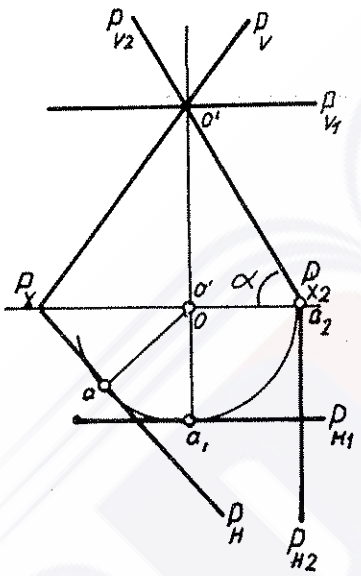
فلو افترضنا ان محور التدوير واقع في مستوي الاسقاط الأفقي لحصلنا على نقطة ثابتة من الأثر الأفقي للمستوي ، يتمثل بنقطة تقاطعه مع محور التدوير ، وفي هذه الحالة يكفي تحديد الوضع الجديد للأثر الأمامي وتحديد نقطة تقاطع الآثار على خط الأرض P_{x1} لرسم الأثر الأفقي للوضعية الجديدة (الشكل ٢٣٧) ٠

عند المقارنة بين الوضعيتين الأولية والجديدة لآثار المستوي نلاحظ أن:

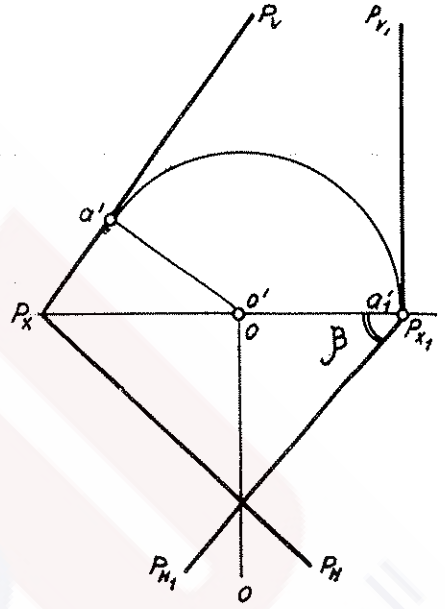
١ـ الزاوية بين P_v و P_h تختلف تماما عن الزاوية بين P_{v1} و P_{h1} عند التدوير ٠

٢ـ تبقى دون تغيير زاوية ميل المستوي المعني (المدور) بالنسبة لمستوي الاسقاط العمودي على محور التدوير ٠

٣ـ وبتحويل وضع المستوي P الى P_1 نحدد زاوية ميله β على مستوي الإسقاط الأمامي V (الشكل ٢٣٧) ٠



شكل رقم (٢٣٨)



شكل رقم (٢٣٧)

٤ـ لتحديد α زاوية ميل المستوي P على مستوي الاسقاط الأفقي H ، يدور المستوي حول محور يقع في مستوي الاسقاط الأمامي ويعامد مستوي الاسقاط الأفقي H (الشكل ٢٣٨) حتى يتخذ وضعية مستوي اسقاطي أمامي ، أثريه P_{h2} و P_{v2} والزاوية المحصورة بين P_{v2} وخط الأرض α تمثل الزاوية المطلوبة .

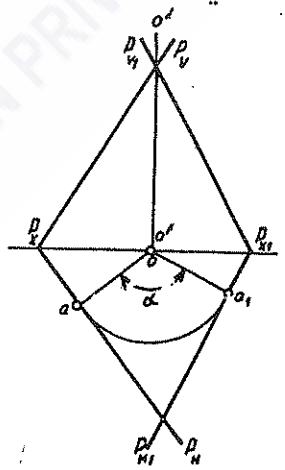
ان الشكل (٢٣٨) يوضح طريقة الحصول على مستو مواز لخط الأرض من تدوير المستوي الأول P . فللحصول على الأثر الأفقي يكفي أن ندّور النقطة a حول مركز التدوير(o) حتى يتخذ وضعية oa_1 العمودي على خط الأرض ومن ثم نرسم من نقطة a_1 مستقيما عموديا على oa_1 (أي موازيا لخط الأرض) يمثل الأثر الأفقي P_{h1} لوضعية المستوي P الجديدة . نقطة 'o تقاطع الأثر

الأمامي P_v ومحور التدوير 0-0 الواقع في مستوي الاسقاط الأمامي ، تبقى ثابتة عند التدوير ولما كانت احدى نقاط الأثر الأمامي فانها تكون احدى نقاطه في وضعية المستوي بعد التدوير أيضا ، وهي كافية لتحديد الأثر الأمامي P_{v1} للوضعية الجديدة ، لأنه يجب أن يوازي خط الأرض .

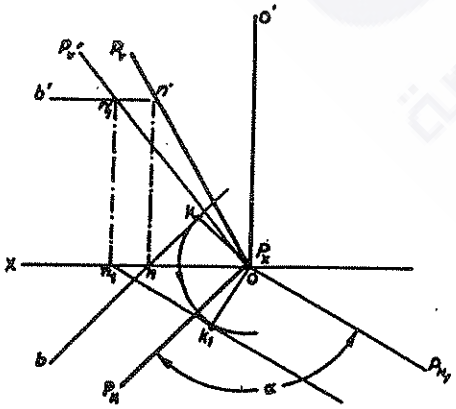
يوضح الشكل (٢٣٩) نفس الطريقة السابقة للتدوير حول محور يقع في أحد مستويات الاسقاط (في الشكل ذاته نجد أن المحور واقع في مستوي الاسقاط الأمامي V) ، ويعامد مستوي الاسقاط الآخر ، أي في مستوي الاسقاط الأفقي H . لدينا المستوي P المحدد بأثريه P_v و P_h (المستوي في حالته العامة) والمطلوب أن ندّوره حول المحور 0-0 بزاوية α باتجاه معاكس لدوران عقرب الساعة . ولهذا نقوم بالخطوات التالية :

١ـ نقيم من o عمودا oa على الأثر الأفقي P_h ومن ثم ندور النقطة a حول o بزاوية α باتجاه معاكس لدوران عقرب الساعة ، حتى تتخذ وضعية a_1 ، ثم نوصل بين a_1 و o .

٢ـ نقيم من a_1 عمودا على Oa_1 ، فنحصل على P_{h1} الأثر الأفقي للمستوي P في وضعيته الجديدة،وهذا الأثر يقطع خط الأرض في النقطة P_{x1} .



شكل رقم (٢٣٩)



شكل رقم (٢٤٠)

٣ـ ان نقطة تقاطع محور التدوير مع الأثر الأمامي P_v للمستوي (هي احدى نقاط هذا الأثر ، وهي تقى ثابتة عند التدوير • وبالتالي تمثل احدى نقاط الأثر الأمامي P_{v1} للمستوي في وضعيته الجديدة • وبذلك تصبح لدينا نقطتين P_{x1} و o' من نقاط P_{v1} • وحين نصل بينهما نحصل على P_{v1} •

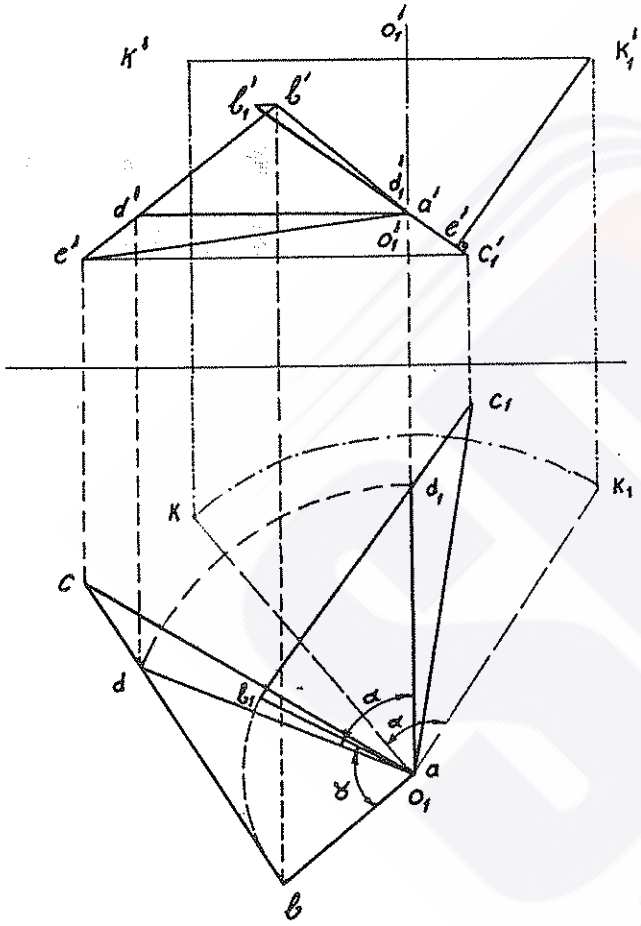
لدينا في الشكل (٢٤٠) الحالة الأعم لهذه الوضعية حيث يقع محور التدوير 0-0 في مستوي الاسقاط الأمامي ولكنه لايتقاطع مع الأثر الأمامي P_v للمستوي المدار P الاّ في : النقطة P_x ، أي : في نقطة تعامده مع مستوي الاسقاط الأفقي •

عند تدوير المستوي P عكس اتجاه دوران عقرب الساعة (عندما ننظر من الأعلى الى المستوي H) بزاوية α يتخذ الأثر الأفقي P_h الوضعية P_{h1} ولتحديد الأثر الأمامي للمستوي في وضعيته الجديدة بعد التدوير نستخدم أفقا للمستوي P ، وليكن NB ، وندّوره بنفس طريقة تدوير الأثر P_h ، ولهذا الغرض نرسم من نقطة o عمودا على المسقط الأفقي (على امتداده في الشكل) لأفق المستوي ، ومن ثم نرسم بنصف قطر تدوير ok قوس دائرة • يمثل المماس المرسوم لهذا القوس والموازي للأثر P_{h1} المسقط الأفقي الجديد لأفق المستوي المدار ، وتمثل النقطة n_1 المسقط الأفق للأثر الأمامي لأفق المستوي في وضعيته الجديدة بعد التدوير ، وأما مسقطه الأمامي n'_1 المتطابق معه فانه يقع على استقامة المسقط الأمامي نفسها في الوضعية الأولية قبل التدوير $b'n'$ ويتحديد من تقاطع هذا المسقط مع خط التداعي الشاقولي المرسوم من n_1 • وحين نصل بين P_x و n'_1 بمستقيم نحصل على

الأثر الأمامي P_{v1} للمستوي P وفي وضعيته الجديدة بعد التدوير ٠

ـ٢ـ٦ـ استخدام التدوير لتحديد المسافة بين مستو ونقطة واقعة خارجه:

لتحقيق ذلك يجب تدوير المجموعة كلها (المستوي والنقطة) الى وضعية تجعل المستوي يتخذ وضعا اسقاطيا ، وعندئذ تكون المسافة بين مسقط النقطة في مستوي الاسقاط المتعامد مع المستوي المعني بعد تدويره ، وبين أثر هذا المستوي في مستوي الاسقاط هي المسافة المطلوبة ٠



شكل رقم (٢٤١)

كمثال على ذلك نفترض أن لدينا مستويا محددا بالمثلث ABC والنقطة K الواقعة خارجه ٠ المطلوب أن نحدد بُعدها عن هذا المستوي (الشكل ٢٤١) ٠

لايجاد الحل ندّور المستوي ABC حول محور عمودي على أحد مستويات الاسقاط (وليكن مستوي الاسقاط الأفقي H) ويمر من احدى نقاط المستوي (ولتكن A مثلا) بحيث يصبح مستويا أماميا اسقاطيا من خلال جعل أفق

المستوي عموديا على مستوي الاسقاط الأمامي • بعد ذلك ندُور النقطة K بنفس الاتجاه والزاوية ، فنجد حينئذ أن العمود المقام من المسقط الامامي الجديد للنقطة K على الأثر الأمامي للمستوي في وضعه الجديد يمثل بُعْدَ هذه النقطة عن المستوي •

ان طريقة الحل تخطيطيا يوضحها الشكل (٢٤١) ، وهي تشمل الخطوات التالية :

١ـ نمرر من النقطة A مستقيما أفقيا في المستوي ، يقطع الضلع BC في نقطة D •

٢ـ نأخذ محور التدوير عموديا على مستوي الاسقاط الأمامي ومارا من نقطة A •

٣ـ ندور المسقط الأفقي للمستقيم الأفقي AD, (ad) حول مركز التدوير o_1 ، المنطبق على a ، حتى يأخذ وضعا عموديا على خط الأرض •

٤ـ ندور النقطة b حول نفس المركز والزاوية والاتجاه ، فنحصل على نقطة b_1 •

٥ـ نمرر مستقيما من d_1b_1 ، ونأخذ من نقطة d_1 مقطعا يساوي (dc) ، فنحدد نقطة c_1 ، ومن ثم نوصل بين c_1 و a فنحصل على المسقط الأفقي ab_1c_1 للمثلث ABC في وضعيته الجديدة •

٦ـ نوجد المسقط الأمامي $a'b'_1c'_1$ للمثلث ABC في الوضع الجديد ، فنراه يمثل خطا مستقيما ، لأن المثلث في وضعيته الجديدة اتخذ وضع مستو أمامي الاسقاط • وبالتالي نجد أن هذا المسقط ينطبق على الأثر الأمامي للمستوي ABC •

٧ـ ندُوّر المسقط الأفقي k للنقطة K بنفس الزاوية والاتجاه حول نفس

المركز ، فنحصل على مسقطها k_1 في وضعها الجديد .

٨ـ نوجد المسقط k'_1 الأمامي للنقطة K في الوضعية الجديدة . نقيم منه عمودا على أثر المستوي الأمامي P_v (المنطبق على $a'_1b'_1c'_1$) .

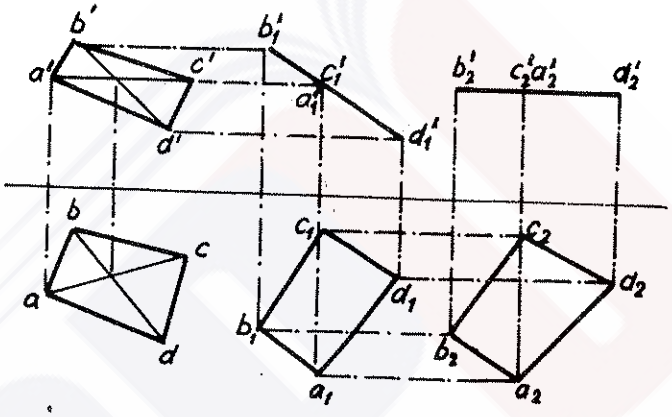
٩ـ يمثل مقطع العمود k'_1e' بُعد النقطة K عن المستوي ABC وهو المطلوب .

VIII ـ٢ـ٧ـ طريقة التدوير الانتقالي والاستغناء عن محاور التدوير :

عند تدوير عنصر هندسي (مقطع مستقيم أو شكل مستو) حول محور يعامد أحد مستويات الاسقاط لايتغير مسقط هذا العنصر على مستوي الاسقاط المعني في الشكل ولا في القياسات ،بل يتغير وضعه بالنسبة لمحور الاسقاط فحسب . وأما المسقط على مستوي الاسقاط الموازي لمحور الدوران فان شكله وقياساته تتغير ، وتنتقل جميع نقاطه (ماعدا النقاط الواقعة على محور الدوران) بخطوط مستقيمة موازية لمحور الاسقاط .

باستغلال هذه الخواص لعملية التدوير يمكن استخدام طريقة التدوير دون الحاجة لتصوير وضع محاور التدوير (أي : بالاستغناء عنها) ، وذلك دون أن نحتاج الى تحديد مركز الدوران . في هذه الحالة نكتفي بافتراض أننا ندور العنصر حتى الوضعية المطلوبة ، ومن ثم ننقل المساقط الناتجة عن التدوير الى موقع آخر بحيث لاتتداخل مع المساقط الأصلية . ولهذا يكفي أن نختار الموقع المناسب ونرسم المسقط في مستوي التدوير حسب الوضعية المطلوبة دون المساس بشكله وقياساته . ومن ثم نرسم المسقط الثاني من تقاطع الشاقول المار من نقاط المسقط الأول مع المستقيمات الأفقية المارة بالنقاط المناظرة من الوضعية الأولية (الأصلية) للمسقط الثاني .

يوضح الشكل (٢٤٢) هذه الطريقة في تحديد الشكل الحقيقي للسطح المستوي رباعي الحروف ABCD • لابد قبل كل شيء في تحديد الشكل الحقيقي للعنصر الهندسي أن يكون هذا العنصر موازيا لأحد مستويات الاسقاط •



شكل رقم (٢٤٢)

عند التدوير حول محور عمودي على أحد مستويات الاسقاط يغدو من غير الممكن أن ننقل عنصرا هندسيا من الوضعية (الحالة) العامة الى وضعية موازية لأحد مستويات الاسقاط بصورة مباشرة ، بل يتطلب ذلك أن ندوره مرة أخرى في هذه المرة حول محور عمودي على مستوي الاسقاط الثاني ، حتى يتخذ وضعا موازيا لمستوي الاسقاط الأول •

وحتى يكون المستوي عموديا على مستو آخر يجب أن يكون أحد مستقيمات المستوي الأول على الأقل عموديا على المستوي الثاني•

ولتبسيط الحل نختار مستقيما أفقيا في المستوي ABCD (في مثالنا هذا يمثل

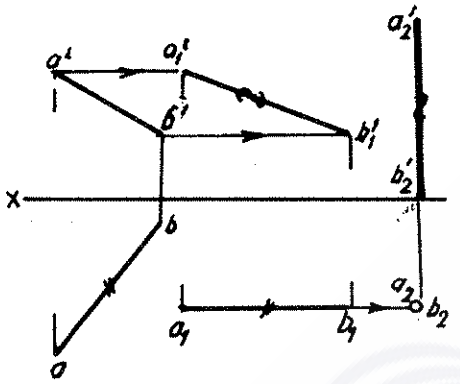
أفق المستوي أحد اقطار الشكل الرباعي AC • وهذه حالة خاصة ، وليس من الضروري الالتزام بها) • وبعد ذلك ننقل المسقط الأفقي abcd دون تغيير قياساته وشكله الى وضعية $a_1b_1c_1d_1$ بحيث يصبح قطره ac ، وبتعبير آخر نقول : يكون أفق المستوي عموديا على المستوي V ، أي يتخذ وضعا شاقوليا • وبهذا نحصل على الوضعية الجديدة للمسقط الأفقي للشكل الرباعي في وضعه العمودي على مستوي الاسقاط الأمامي •

ولايجاد المسقط الثاني للعنصر الهندسي بعد التدوير – حسب القواعد المذكورة سابقا – نوجد المسقط الأمامي للشكل الرباعي في الوضعية الجديدة فنحصل على المستقيم $b'_1a'_1c'_1d'_1$ (وهو ما يجب ان يكون لأن الشكل الرباعي في وضعه الجديد عمودي على مستوي الاسقاط الأمامي وبالتالي نجد أن مساقط جميع العناصر الهندسية الواقعة في المستوي على مستوي الاسقاط الأمامي تنطبق على أثر الشكل الرباعي الأمامي) •

بعد ذلك ننتقل الى تدوير الشكل الرباعي ، ليتخذ وضعية موازية لمستوي الاسقاط الأفقي • وفي هذه الحالة نجد أن تدويره يتم حول محور عمودي على مستوي الاسقاط الأمامي ، لأن هذا الشكل عمودي على مستوي الاسقاط الأمامي ، ولذلك يكفي أن ننقل المسقط الأمامي $b'_1a'_1c'_1d'_1$ دون تغيير شكله وطوله ، وأن نجعله موازيا لمستوي الاسقاط الأفقي ، أي رسمه في وضع الأفقي • ووفق القواعد التي أشرنا اليها سابقا نحدد الوضع الجديد للمسقط الأفقي $a_2b_2c_2d_2$ الذي يمثل الشكل الحقيقي للشكل الرباعي ABCD دون تشويه •

لدينا في الشكل (٢٤٣) مثال على تدوير المستقيم AB لنقله من حالته العامة الى وضع مستقيم اسقاطي أفقي (مستقيم عمودي على مستوي الاسقاط الأفقي H) •

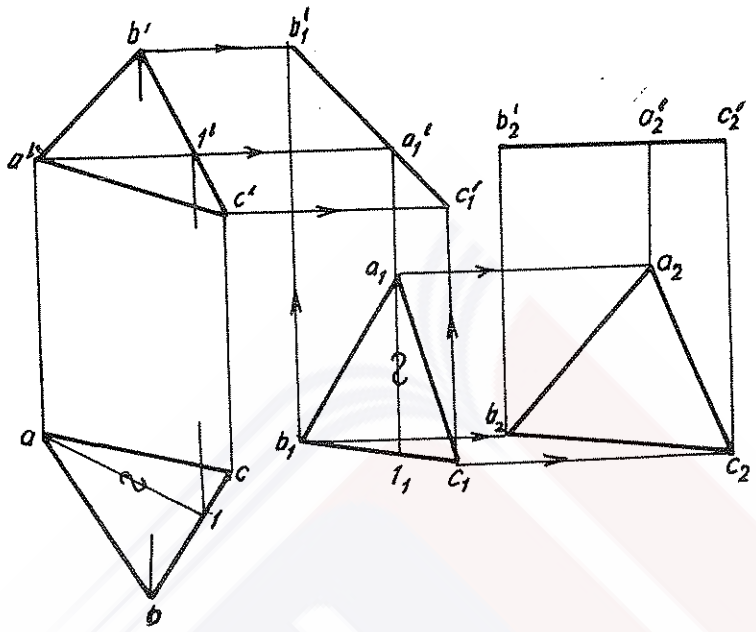
للوصول الى الوضعية المطلوبة لابد أولا أن ننقل المستقيم الى وضعية موازية لأحد مستويي الاسقاط V أو H • في مثالنا هذا نختار الوضع الموازي لمستوي الاسقاط الأمامي ويعني هذا أن نـدور المستقيم AB حول محور عمودي على مستوي الاسقاط الأفقي ، أي أن وضع مسقطه الأفقي سيتغير ، ولكنه سيحافظ على طوله • ولما كان المستقيم سيتخذ وضعية مستقيم أمامي فان مسقطه الأفقي يصبح موازيا لخط الأرض • على هذا الأساس يكفينا أن نتخذ موقعا مناسبا على الورقة ونرسم مستقيما موازيا لخط الأرض ، طول مقطعه a_1b_1 يساوي طول المقطع ab • يتحدد المسقط الأمامي من تقاطع العموديين المقامين من a_1 و b_1 على خط الأرض مع المستقيمين الأفقيين (الموازيين لخط الأرض) المارين من a' و b' فنحصل على $a_1'b_1'$ •



شكل رقم (٢٤٣)

للانتقال من وضعية مستقيم أمامي الى وضعية مستقيم عمودي على مستوي الاسقاط الأفقي H يجب تدوير المستقيم الأمامي A_1B_1 حول محور عمودي على مستوي الاسقاط الأمامي • لهذا يكفينا اختيار موقع مناسب نرسم فيه المقطع $a_2'b_2'$ ، الذي يساوي طوله طول المقطع $a_1'b_1'$ عموديا على خط الأرض ومن ثم نحدد المسقط الأفقي a_2b_2 المنطبق على أثره الأفقي وفق نفس المبدأ السابق •

ولدينا في الشكل (٢٤٤) مثال يكرر المثال الموضح في الشكل (٢٤٢) لكن الشكل المستوي في هذه الحالة هو المثلث ABC والفارق بين المثالين



شكل رقم (٢٤٤)

هو أن المثال الأول كان في الاسقاط المحدد ، وأن المثال الثاني كـــان في الاسقاط الشامل ، أي دون استخدام محاور الاسقاط .

وأما طريقة الحل وخطوات العمل فهي تطابق تماما مابيناه في المثال الأول . وأما الاختلاف فهو ينحصر في التعبير اللغوي ، فبدلا من الحديث عن مستقيم مواز لخط الأرض ، نتحدث عن مستقيم أفقي ، وبدلا من الحديث عن مستقيم عمودي على خط الأرض ، نتحدث عن مستقيم شاقولي ، ولهـــذا نستطيع تلخيص خطوات الحل على النحو التالي :

١ـ نختار مستقيما أفقيا في مستوي المثلث ، ولهذا نرسم من النقطة a' مستقيما أفقيا يقطع الضلع b'c' في النقطة 1' ، ونوجد مسقطهـــا الأفقي بانزال شاقول من 1' على bc ونوصل بين 1 و a ، فنحصل على المسقط الأفقي لأفق المثلث .

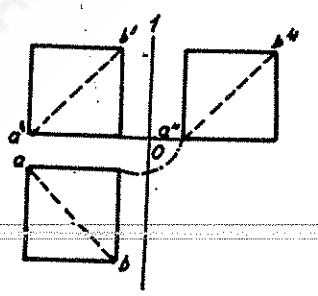
٢ـ نرسم في موقع مناسب مقطعا شاقوليا $a_1 1_1$ يساوي المقطع a 1 ،وعلى

أساس هذا الشاقول نرسم وبشكل كيفي المسقط الأفقي $a_1b_1c_1$ ، يحدد مسقطه الأمامي $a'_1b'_1c'_1$ من تقاطع الخطوط الأفقية المارة من a' و b' و a' والخطوط الشاقولية المارة من a_1 و b_1 و c_1 على التوالي فنحصل على المستقيم $b'_1a'_1c'_1$ لأن المثلث أصبح في وضعية مستو اسقاطي أمامي ٠

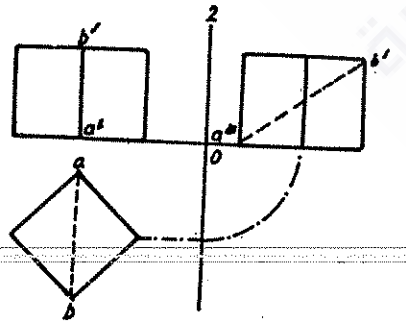
٣ـ في موقع مناسب أيضا نرسم مقطعا مستقيما أفقيا $b'_2a'_2c'_2$ يساوي المقطع $b'_1a'_1c'_1$ ومن تقاطع المستقيمات الشاقولية النازلة من هذه النقاط مع الخطوط الأفقية المارة من c_1 و a_1 و b_1 تحدد المساقط الأفقية c_2 و a_2 و b_2 ، وبوصلها نحصل على المسقط الأفقي $a_2b_2c_2$ الذي يعبر عن الشكل الحقيقي للمثلث ABC ، وهو المطلوب ٠

نلاحظ من خلال الأمثلة السابقة أن هذه الطريقة تبسط خطوات العمل وتختصرها من جهة ، ومن جهة أخرى تتلافى احتمالات تداخل أو تطابق المساقط للأوضاع الأساسية والجديدة ٠

يمكن استخدام طريقة التدوير ـ دون استخدام الأكسونومتريا ـ من أجل الحصول على التعبير المنظور للمكعب ولبعض العناصر الهندسية المتعددة السطوح ٠ ومن خلال الأشكال (٢٤٥ و ٢٤٦ و ٢٤٧) يتضح لدينا تسلسل عملية تدوير المكعب لابراز وضعه المنظور وذلك من خلال تدوير قطره AB



شكل رقم (٢٤٥)

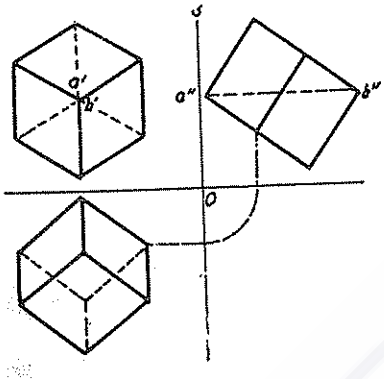


شكل رقم (٢٤٦)

حتى يعامد مستوي الاسقاط الأمامي V .

ويتم ذلك من خلال تدويره أولا بحيث يصبح القطر AB موازيا لمستوي الاسقاط الجانبي W (الشكل ٢٤٦) .

ونحدد مساقطه في هذه الوضعية في التعبير الاسقاطي الثلاثي ، ونُدور بعد ذلك القطر AB حتى يصبح عموديا على مستوي الاسقاط الأمامي V (الشكل ٢٤٧).



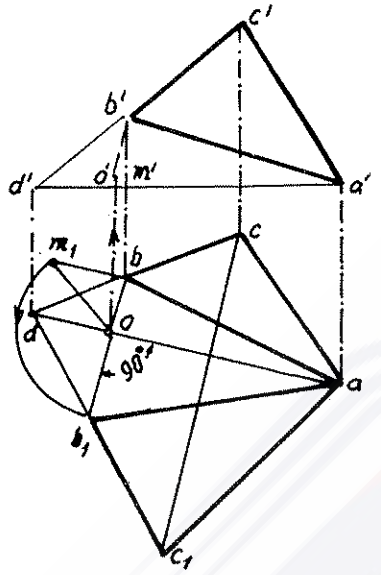
شكل رقم (٢٤٧)

VIII-٢-٨- تدوير المستوي حول أحد مستقيماته الخاصة :

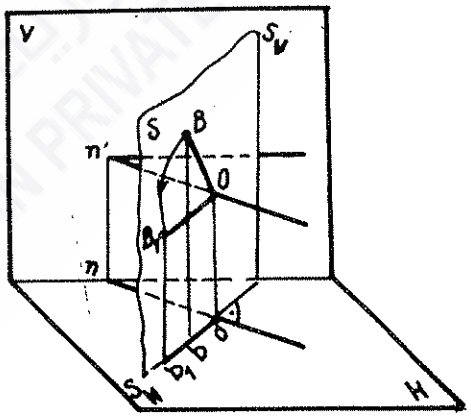
لاحظنا في التدوير الثنائي وفي التدوير الانتقالي للحصول على الوضعية المطلوبة أننا يجب في بعض الأحيان أن نقوم بأكثر من عملية وسيطة للوصول الى الهدف النهائي . ففي حالة التدوير الانتقالي (المثال الذي يوضح هذه الطريقة) للحصول على الشكل الحقيقي للشكل الرباعي ABCD قمنا بعمليتي تدوير حول محاور عمودية على مستويات الاسقاط ولتسهيل الوصول الى الوضعية المطلوبة واختصار العمليات للحصول على الأشكال والقياسات الحقيقية للعناصر تتطلب منا بعض الحالات أن ندور المستوي الواقع فيه هذا العنصر حول أحد مستقيماته الخاصة (أفق المستوي أو جبهة المستوي أو آثار المستوي) حتى يتخذ وضعا موازيا لنفس مستوي الاسقاط (الذي يوازيه المستقيم المعني) .

VIII-٢-٨-١- تدوير المستوي حول أفقه :

ان ايجاد الشكل والقياسات الحقيقية لمستوي المثلث ABC في حالته العامة التي يوضحها الشكل (٢٤٨) تطلب منا في الفقرات السابقة أن نقوم بأكثر من عملية التدوير ، كما هو الحال في المثال الموضح في الشكل (٢٤٤) • لنحث الآن حل المسألة بواسطة تدوير مستوي المثلث حول أفقه ، ولنختر أفق المستوي محور للدوران وهذا يعني أن النقطة A ستبقى ثابتة • ولذلك تحدد الوضعية الجديدة للمسقط الأفقي من الوضعية الجديدة لنقطتي رأسيه B و C • وقبل أن نعالج الأوضاع الجديدة لنقاط المثلث ABC نفسه ندرس حالة عامة لدوران نقطة ، ولنفترض أن النقطة B في الشكل (٢٤٩) تدور حول محور أفقي 'on ، فترسم قوسا من دائرة واقعا في المستوي S العمودي على محور الدوران ، ولهذا يكون مستويا اسقاطيا أفقيا • ولذلك نجد أن المسقط الأفقي للدائرة المرسومة بدوران النقطة B، يقع (ينطبق) على الأثر الأفقي S_h للمستوي S •



شكل رقم (٢٤٨)



شكل رقم (٢٤٩)

عندما يتخذ نصف قطر التدوير OB وضعا موازيا لمستوي الاسقاط الأفقي H

يصبح المسقط الأفقي ob_1 مساويا OB_1 ، أي يساوي الطول الحقيقي لنصف القطر OB .

نعود الآن الى مثالنا الأساسي (٢٤٨) ، ونجري العمليات التالية :

١ـ ننزل من النقطة b عمودا على ad ، ونحدد المسقط الأفقي لمركز التدوير (النقطة o) والمسقط الأفقي لنصف قطر تدوير النقطة B (مقطع المستقيم ob) .

٢ـ بعد ذلك نوجد المسقط الأمامي لمركز التدوير (النقطة o') والمسقط الأمامي لنصف قطر تدوير النقطة B (مقطع المستقيم o'b') .

٣ـ نحدد الطول الحقيقي لنصف قطر تدوير النقطة B باستخدام طريقة المثلث قائم الزاوية فنرسم من النقطة b عمودا على ob ونحدد عليه bm_1 مساويا b'm' وتر المثلث om_1 = نصف قطر تدوير النقطة B .

٤ـ بعد ذلك يمكن ايجاد الموقع الجديد b_1 للنقطة B والذي يجب أن يقع على امتداد المستقيم bo العمودي على المسقط الأفقي لمحور الدوران ad .

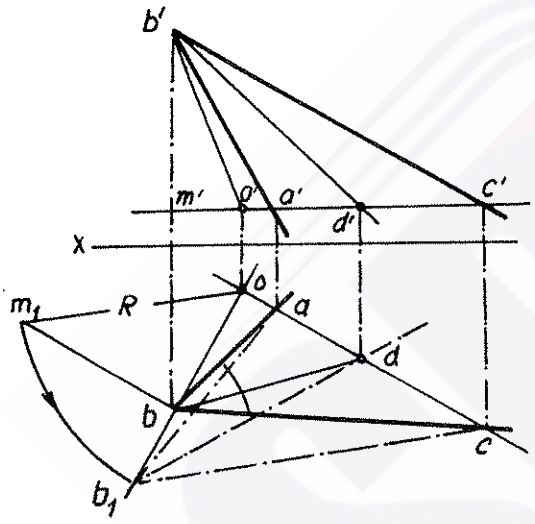
٥ـ ان تحديد الموقع الجديد c_1 للنقطة C يمكن أن يتحقق دون البحث عن نصف قطر التدوير وذلك من خلال تقاطع مستقيمين : الأول يمثل العمود المقام من النقطة c على المستقيم ad والثاني يمثل المستقيم المار من النقطتين b_1 و d . وتمثل نقطة التقاطع المسقط الأفقي للنقطة D التي تنتمي للضلع BC وتقع على محور الدوران .

المسقط الأفقي ab_1c_1 للوضعية الجديدة للمثلث ABC تعبر عن الشكل والقياسات الحقيقية للمثلث نفسه ، لأن المثلث في هذه

الوضعية اتخذ وضعا موازيا لمستوي الاسقاط الأفقي H .

٦ـ يتطابق المسقط الأمامي $a'b'_1c'_1$ للوضعية الجديدة للمثلث مع المسقط الأمامي للمستقيم الأفقي $a'd'$ ، أي أن b'_1 و c'_1 تقعان عليه ، لأن المسقط الأمامي لمستو مواز للمستوي H يتمثل بمستقيم أفقي .

اذا دُوِّرَ شكل مستو بحيث يوازي مستوي الاسقاط الأمامي V فان محور تدويره يتمثل بجبهة هذا المستوي .



شكل رقم (٢٥٠)

لنفترض أن المطلوب تنصيف الزاوية ABC التي يعبر عنها مسقطاها الأمامي $a'b'c'$ والأفقي abc (الشكل ٢٥٠) .

للوصول الى الحل المطلوب لابد أولا أن نعرف القيمة الحقيقية للزاوية ABC ويتحقق ذلك من خلال جعل أضلاع الزاوية موازية لأحد مستويات الاسقاط وعندئذ يكون مسقطها على هذا المستوي معبرا عن قيمتها الحقيقية ويصبح بامكاننا أن نرسم منصفها . في مثالنا الذي يوضحه الشكل (٢٥٠) نختار مستوي الاسقاط الأفقي H لموازاة مستوي الزاوية ABC، أي ندّور مستوي الزاوية حول أفقه . ولهذا الغرض نمرر من النقطة A ضمن مستوي الزاوية المستقيم AC موازيا لمستوي الاسقاط الأفقي H ، فيقطع ضلع الزاوية الآخر في نقطة C ، ولهذا تبقى النقطتان A و C ثابتتين ، ويتطلب منا أن ندّور قمة الزاوية وحدها أي النقطة B ، حتى نحصل على الوضعية المطلوبة .

ان مركز الدوران 0 ('o و o) يحدد بانزال عمود من المسقط الأفقي b على المسقط الأفقي لأفق المستوي ac ، فيقطعه في النقطة o ،ومن ثم نوجد مسقطها الأمامي 'o ، ويحدد الطول الحقيقي لنصف قطر التدوير ـ كما هو واضح في المثال السابق ـ باستخدام طريقة المثلث القائم ، فنأخذ الضلع القائم bm_1 مساويا 'b'm، فنحصل على Om_1 الذي يساوي الطول الحقيقي لنصف قطر التدوير R ٠

بعد تحديد الطول الحقيقي لنصف قطر التدوير نحدد b_1 على امتداد bo الذي يعامد المسقط الأفقي لمحور التدوير ، كما هو موضح في الشكل ، وبعد تحديد b_1 نوصلها بالنقطتين a و c ، فنحصل على المسقط الأفقي للوضعية الجديدة لمستوي الزاوية ABC التي توازي المستوي H ، أي نحصل على قيمة الزاوية الحقيقية التي تساوي الزاوية ab_1c ٠ وبعد ذلك ننصف هذه الزاوية ، فنحصل على النقطة d الواقعة على المسقط الأفقي لأفق المستوي ،ومن ثم نحدد النقطة 'd الواقعة على 'a'c ٠ النقطتان d و'd تمثلان المسقطين الأفقي والأمامي للنقطة D الواقعة على أفق المستوي AC ، أي الواقعة على محور الدوران ، ولهذا تكون ثابتة ، لايتغير وضعها ٠ وعلى هذا الأساس يكوّن المستقيمان db و 'd'b مسقطي المنصف المطلوب DB للزاوية ABC ٠

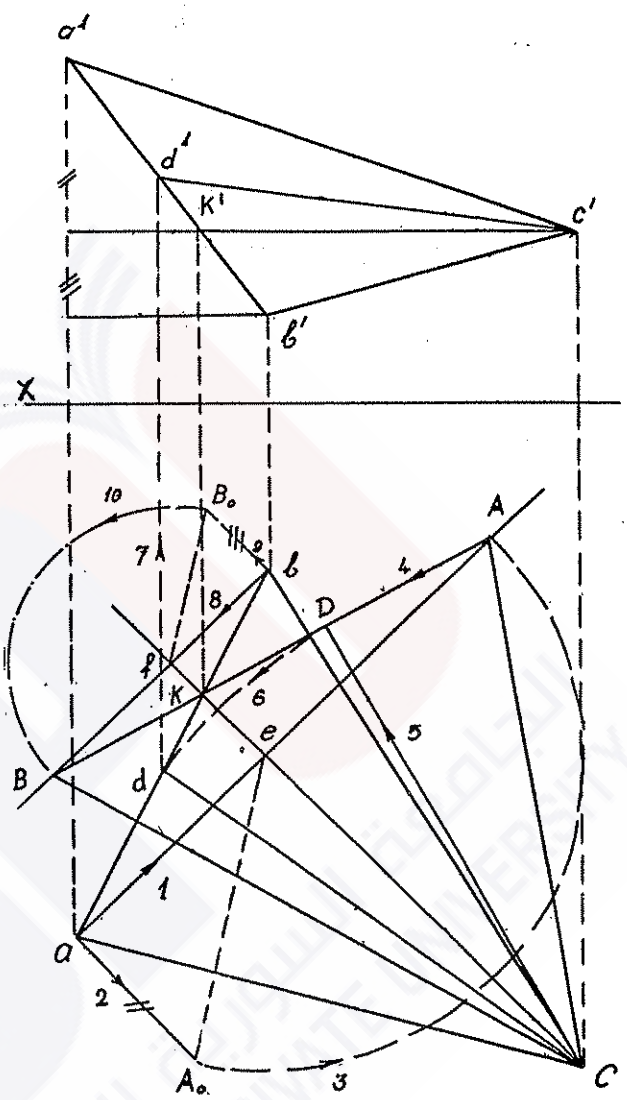
في المثال الذي يوضحه الشكل (٢٥١) نبين الخطوات التفصيلية الكاملة لايجاد ارتفاع المثلث ABC وطول أضلاعه ٠

فللحصول على الشكل الحقيقي للمثلث لابد ـ كما هو واضح في الأمثلة السابقة ـ أن ندوره حتى يوازي أحد مستويات الاسقاط ٠ ولهذا نختار أفقا لمستوي المثلث ندوره حوله حتى يتخذ وضعا موازيا لمستوي الاسقاط الأفقي ٠ ولأجل ذلك

نمرر من النقطة C مستقيما أفقيا واقعا في المثلث ABC فيقطع المستقيم AB في K •

لكي يتخذ المثلث الوضعية الأفقية يكفي تدوير الضلع AB حول أفق المستوي CK حتى يصبح في وضع أفقي ، لأن النقطة C واقعة على محور الدوران ، ولهذا تبقى ثابتة •

تقع النقطة K على الضلع AB في نفس الوقت الذي تقع فيه على أفق المستوي CK ، ولهذا يكفي ايجاد وضعية نقطة أخرى من المستقيم بعد التدوير (ولتكن النقطة A) من أجل تحديد الوضع الجديد للضلع AB وبالتالي تجديد الوضع الجديد للمثلث • ولذلك نتبع الخطوات التالية :



شكل رقم (٢٥١)

١ـ نقيم من المسقط الأفقي a للنقطة A عمودا على المسقط الأفقي ck لأفق المستوي CK ، فيقطعه في النقطة e التي ستكون مركز التدوير •

٢ـ نقيم من النقطة a عمودا على ae ، ونحدد عليه فرق احداثيات $(Z_A - Z_c)$ فنحصل على النقطة A_o •

٣ـ بنصف قطر eA_o الذي يساوي نصف قطر تدوير النقطة A (a و a') الحقيقي نرسم قوسا حتى نقطة تقاطعه مع امتداد ea . وتحدد نقطة التقاطع هذه موقع النقطة A في الوضعية الأفقية للمستقيم AB .

٤ـ نوصل النقطتين K و A ، فنحصل على المستقيم AK الذي يحدد الوضعية الأفقية للمستقيم AB .

٥ـ نقيم من النقطة C عمودا على AK ، فنحصل على المقطع CD الذي يمثل ارتفاع المثلث ABC في وضعه الموازي لمستوي الاسقاط الأفقي H ، أي : الوضع والطول الحقيقي لهذا الارتفاع .

٦ـ نرسم من المركز C قوسا نصف قطره CD ، ليقطع ab في نقطة تمثل المسقط الأفقي d لنقطة تقاطع ارتفاع المثلث مع قاعدته في حالته العامة (الوضعية الأولية) .

٧ـ نوجد المسقط الأمامي 'd للنقطة D الواقعة على المسقط الأمامي 'a'b ، ومن ثم نوصل بين 'd و 'c فنحصل على المسقط الأمامي لارتفاع المثلث في وضعيته الأولية ، ويمثل cd مسقطه الأفقي في هذه الوضعية .

٨ـ نقيم من النقطة b عمودا على المسقط الأفقي CK للمستقيم الأفقي CK ، فتمثل نقطة تقاطع هذا العمود مع امتداد AK النقطة B في الوضعية الأفقية للمستقيم AB .

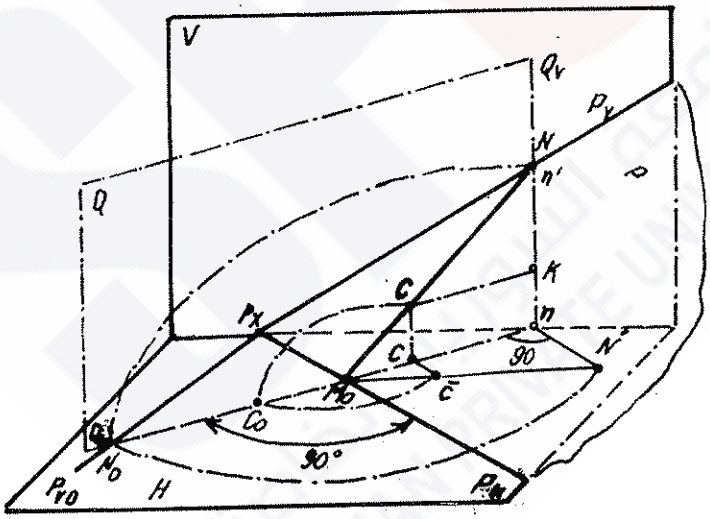
٩ـ للتحقق من صحة ايجاد النقطة B يمكن تكرار طريقة ايجاد النقطة A ، ولذلك نقيم عمودا على bf ونحدد عليه قيمة Z_b-Z_c ، فنحصل على النقطة B_o .

١٠ـ نرسم بنصف قطر fB_o الذي يساوي نصف قطر تدوير النقطة B (b و b') الحقيقي

الحقيقي قوسا يتقاطع مع امتداد bf • نقطة التقاطع هذه تحدد موقع النقطة B في الوضعية الأفقية للمستقيم AB ، ونلاحظ هنا أنها نفس النقطة التي حددت في الفقرة الثامنة •

VIII-٢-٩- تدوير المستوي حول أحد آثاره حتى التطابق مع مستوي الاسقاط أو (التطابق كحالة خاصة للتدوير) •

ندور في هذه الحالة المستوي P حول أحد آثاره حتى يتطابق مع مستوي الاسقاط الذي يقع فيه هذا الأثر • نتيجة هذا التطابق تُسقط جميع العناصر الهندسية المنتمية الى المستوي المعني على مستوي الاسقاط هذا دون أي تشويه أو تحريف • وهذه الطريقة يوضحها الشكل (٢٥٢) : يُدور



شكل رقم (٢٥٢)

المستوي P حول محور التدوير المتمثل بأثره الأفقي P_h بعيدا عن المستوي V نحو المشاهد حتى يتطابق مع مستوي الاسقاط الأفقي H •

في وضعية تطابق المستوي P مع المستوي H يقع في الأول مستقيمان

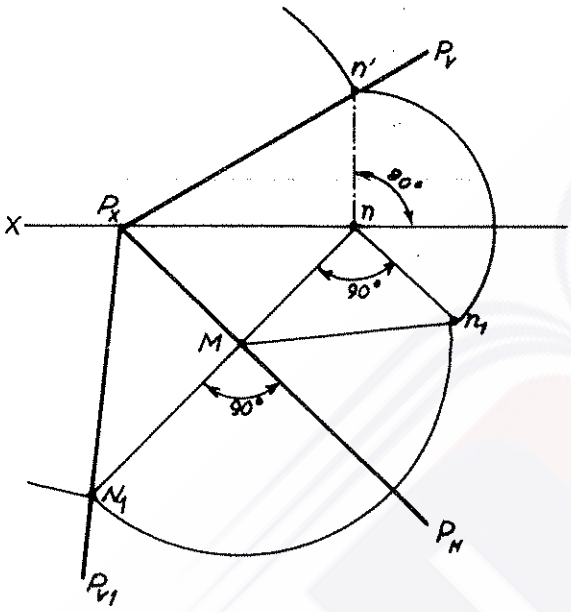
متقاطعان (متلاقيان) هما أثره الأفقي P_h والمستقيم P_{v1} الذي يمثل الأثر الأمامي P_v في وضعية تطابق المستوي P مع المستوي H ٠

ولما كان الأثر الأفقي P_h هو محور الدوران يبقى وضعه ثابتا دون تغيير ، وتبقى نقطة التقاء الأثرين P_x ثابتة (لأنها تنتمي الى الأثر الأفقي P_h أيضا)، ولكنها تنتمي أيضا الى الأثر الأمامي P_v ٠ ولهذا السبب يكفي لمعرفة الوضعية الجديدة للأثر الأمامي عند التطابق أن نعرف وضع نقطة واحدة أخرى منتمية الى هذا الأثر ، ماعدا النقطة P_x في حالة التطابق مع المستوي H ٠ ولهذا الغرض ندرس وضع نقطة ما (كالنقطة N) تنتمي الى الأثر الأمامي P_v ، وتدور عند تدوير المستوي P لمطابقته مع المستوي H فترسم قوس دائرة تقع في المستوي Q العمودي على محور التدوير ويقع مركزها في النقطة M_o التي تمثل نقطة تقاطع الأثر الأفقي P_h (محور التدوير) مع المستوي Q ٠ ولذلك نقول : اذا رسمنا من النقطة M_o قوس دائرة نصف قطره M_oN وينتمي الى المستوي Q فانه يقطع الأثر الأفقي لهذا المستوي Q_h في النقطة N_o التي تمثل الوضعية التطابقية للنقطة N مع المستوي H بعد تدوير المستوي P ٠ بالوصل بين النقطتين P_x و N_o بمستقيم نحصل على وضعية التطابق للأثر الأمامي P_{vo} للمستوي P ٠ ولما كان مقطع المستقيم P_xN يحافظ على قيمة ثابتة عند تدوير المستوي يمكن ـ كما هو واضح في الشكل ـ أن نحصل على النقطة N_o كنقطة تقاطع Q_h مع القوس الذي رسمناه بنصف قطر P_xN من النقطة P_x الواقعة على المستوي H ٠

ان التعبير الاسقاطي لعملية التطابق التي أشار اليها المثال السابق موضح في الشكل(٢٥٣) ، وهذه العملية تتم حسب الخطوات التالية :

١ـ نحدد على الأثر الأمامي P_v نقطة كيفية (كالنقطة N) تتطابق مع

مسقطها الأمامي n' ومن مسقطها الأفقي n نرسم المستقيم nM عموديا على محور التدوير ، أي على الأثر الأفقي P_h .



شكل رقم (٢٥٣)

٢ـ على هذا المستقيم nM يجب ان تقع النقطة N بعد التطابق وذلك على بُعد عن النقطة M يساوي نصف قطر تدوير النقطة N ، أو على مسافة $P_x n'$ من النقطة P_x .

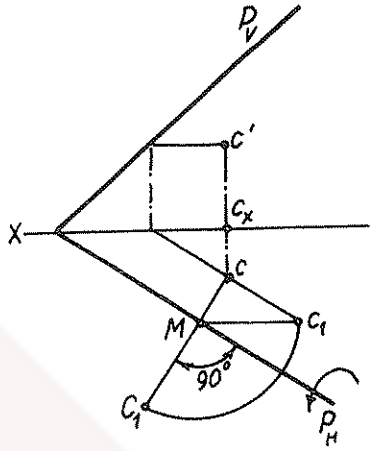
٣ـ يحدد الطول الحقيقي لنصف قطر التدوير بطريقة المثلث قائم الزاوية . فالضلعان القائمان يتمثلان بالمستقيمين Mn و nn_1 (حيث $nn' = nn_1$)، وبهذا يساوي طول نصف قطر التدوير الحقيقي طول مقطع المستقيم Mn_1 .

٤ـ ان نقطة تقاطع امتداد المستقيم nM مع القوس المرسوم من نقطة M بنصف قطر Mn_1 أو مع القوس المرسوم من P_x بنصف قطر $P_x n'$ تحدد النقطة N_1 التي تمثل وضعية التطابق للنقطة N بعد تدوير المستوي P .

٥ـ نمرر من P_x و N_1 مستقيما ،فنحصل على وضعية التطابق الأثر الأمامي P_v التي يمثلها المستقيم P_{v1} .

ندرس الآن كيفية تحديد الوضع التطابقي لنقطة في المستوي المعني P

(ولتكن النقطة C في الشكل ٢٥٢) عند تدوير هذا المستوي حول أثره الأفقي حتى تطابقه مع المستوي H • ولذلك نستخدم التعبير الاسقاطي المستوي لهذا الغرض (الشكل ٢٥٤) ونتبع الخطوات التالية :



شكل رقم (٢٥٤)

١ـ من المسقط الأفقي c للنقطة C نرسم مستقيما cM عموديا على الأثر الأفقي P_h للمستوي P •

٢ـ نحدد نصف قطر التدوير Mc_1 بطريقة المثلث قائم الزاوية ، ويتمثل بوتر المثلث قائم الزاوية، ضلعاه القائمان هما المستقيم Mc والمستقيم $c\ c_1$ ($c'\ c_x = c\ c_1$) .

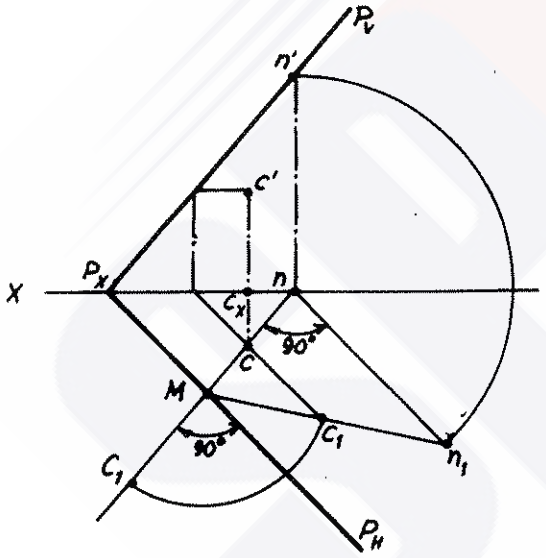
٣ـ نرسم من النقطة M قوسا نصف قطره Mc_1 ، يتقاطع مع امتداد المستقيم cM في النقطة C_1 التي تعبر عن الوضع التطابقي للنقطة C مع المستوي H بعد تدوير المستوي P حول أثره الأفقي •

واذا كان لدينا مقطع مستقيم ينتمي الى المستوي فان وضعه التطابقي عند تدوير المستوي حتى التطابق مع مستوي الاسقاط يتحدد من خلال تحديد الوضع التطابقي لنقطتي نهايتي المقطع فنحصل عندئذ على مقدار المسافة بين هاتين النقطتين ، وبتعبير آخر نقول : نحصل على الطول الحقيقي للمقطع •

من الفصول السابقة يتضح لدينا أن المستقيم الأفقي في المستوي P (أفقه) يوازي أثره الأفقي P_h وأن جبهته توازي أثره الأمامي P_v • فعندما نوجد الوضعية التطابقية لأفق المستوي المتطابق أو جبهته يكفي أن نوجد الوضعية التطابقية لآثارهما ، ومنها نرسم مستقيما يوازي الأثر الأفقي للمستوي P_h في

حالة أفق المستوي أو يوازي أثره الأمامي P_{v1} التطابقي في حالة جبهته ، وذلك عندما يكون التدوير حول الأثر الأفقي والتطابق مع المستوي H •

ان هذه الميزات يمكن أن تستخدم في حل المسائل العكسية ، أي : عندما تكون الوضعية التطابقية للعنصر الهندسي معروفة لدينا ، والمطلوب أن نعرف وضعه الاسقاطي الأساسي ، فاذا افترضنا أن لدينا الوضع التطابقي C_1 مع المستوي H للنقطة C التي تنتمي الى المستوي P المحدد بأثريه P_h و P_v (راجع الشكل ٢٥٢) فان المطلوب أن نوجد مساقطها الأساسية •



شكل رقم (٢٥٥)

عندما تتحرك النقطة C في الفراغ عند تدوير المستوي P الذي تنتمي اليه حول أثره الأفقي P_h ، يتحرك مسقطها الأفقي c على مسار المستقيم C_1n (الشكل ٢٥٥) العمودي على مسار الأثرالأفقي P_h، أي:يتحرك على مسار الأثر الأفقي Q_h لمستوي التدوير Q الذي تتحرك ضمنه النقطة C • ومن النقطة n نقيم عمودا على خط الأرض (المحور X) فنحصل على الأثر الأمامي Q_v للمستوي Q • أن النقطة C ـ كما هو واضح من خلال الشكل (٢٢٥) ـ تقع على خط تقاطع المستويين P و Q ، وذلك على مسافة MC من النقطة M •

نرسم في المستوي الأفقي H المثلث قائم الزاوية Mnn_1 ، بحيث يكون

ضلعه القائم $nn_1 = nn'$ (الشكل ٢٥٥) ، فنلاحظ أن المثلث Mnn_1 يساوي المثلث Mnn' في الفراغ (الشكل ٢٢٥) .

نأخذ من النقطة M الواقعة على وتر المثلث Mn_1 مقطعا يساوي MC_1 الذي يمثل نصف قطر تدوير النقطة C ، فنحصل على النقطة c_1 . ومن هذه النقطة نقيم عمودا على C_1n ، فنحصل على النقطة c وهي المسقط الأفقي للنقطة C . ويمكن أن نتوصل الى ذلك أيضا من خلال تساوي زوجين من المثلثات (الشكلان ٢٥٢ و ٢٥٥) واقعين في المستويين H و Q ، أي :

$\triangle Mnn' = \triangle Mnn_1$ و $\triangle McC = \triangle Mcc_1$ علما بأن زوج المثلثين الأوليين يشابه الزوج الثاني من المثلثات .

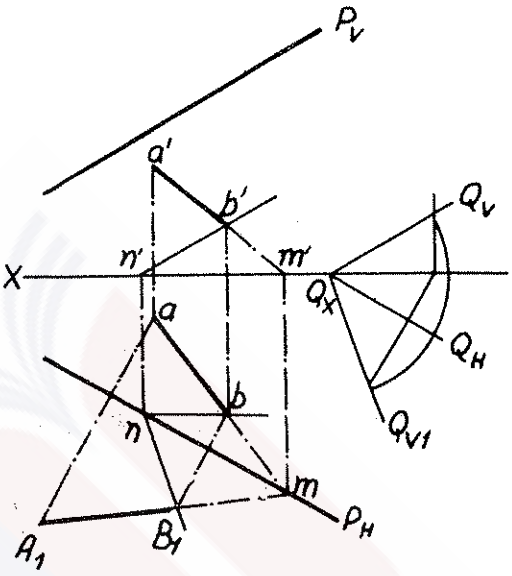
ان النقطة c' ، وهي المسقط الأمامي للنقطة C ، تقع على العمود المقام من النقطة c على خط الأرض (المحور X) وعلى مسافة c_xc' من المحور X ، وبحيث تكون $c\,c_1 = c_x\,c'$.

واذا كان المطلوب في المسألة العكسية أن نوجد المساقط الأساسية لمستقيم واقع في المستوي المتطابق مع أحد مستويات الاسقاط من خلال معرفة الوضعية التطابقية لهذا المستقيم فان ذلك يتحقق من خلال ايجاد المساقط الأساسية لنقطتين من نقاط المستقيم بالطريقة السابقة نفسها .

في الحالات التي يتعذر علينا فيها أن نوجد نقطة تلاقي آثار المستوي P_x وفي بعض الحالات الأخرى يمكن أن نستخدم الطريقة التالية (الشكل ٢٥٦) لايجاد المساقط الأساسية للمستقيم AB الذي ينتمي الى المستوي P المحدد بأثريه P_h و P_v اذا علمنا وضعه التطابقي A_1B_1 مع المستوي H . ولنتوصل في هذه الطريقة الى الحل نرسم نتيجة تعذر ايجاد النقطة P_x ، مستويا مساعدا Q موازي للمستوي P ومحددا بأثريه Q_h و Q_v المتلاقيين في النقطة Q_x .

ومن ثم نوجد وفق الطريقة السابقة الوضعية المتطابقة Q_{v1} لأثره الأمامي بعد تدوير المستوي حول أثره الأفقي Q_h وتطابقه مع المستوي الأفقي H ٠

ولما كان المستويان متوازيين فان آثارهما ومستقيماتهما الجبهية والأفقية متوازية أيضا ٠ ولذلك لايحدد المستقيم Q_xQ_{v1} اتجاه جبهة المستوي Q فحسب وانما يحدد اتجاه جبهة المستوي P أيضا



شكل رقم (٢٥٦)

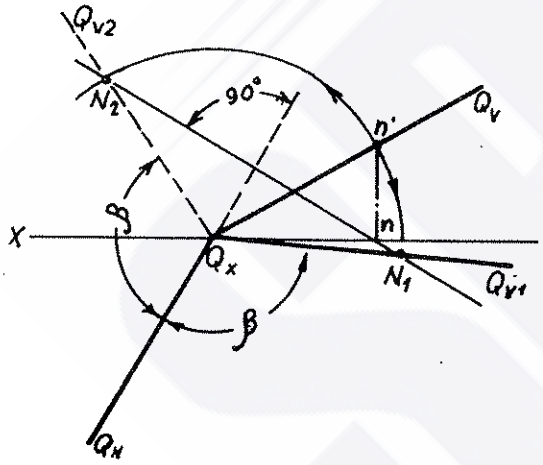
في وضعيتهما المتطابقة مع المستوي H ٠ وعلى هذا الأساس نمرر من النقطة B_1 مستقيما B_1n موازيا للأثر Q_{v1} ، فنحصل على الوضعية التطابقية لجبهة المستوي P المار من النقطة B ٠ هذا المستقيم يقطع الأثر الأفقي P_h في نقطة n ، ويعني هذا أن النقطة n ثابتة لم يتغير موقعها خلال التدوير حول P_h لأنها أحد نقاطه ٠ ولذلك تمثل احدى نقاط الوضعية الأساسية للمسقط الأفقي لجبهة المستوي BN وبالتحديد تمثل أثره الأفقي ٠ ولهذا السبب نجد أن نقطة تقاطع المستقيم الأفقي المرسوم من النقطة n (المسقط الأفقي لجبهة المستوي P) والعمود المقام من B_1 على الأثر الأفقي P_h تحدد لنا المسقط الأفقي b للنقطة B ، وهي احدى نقاط المستقيم AB ٠ يوازي المسقط الأمامي لجبهة المستوي P أثر المستوي الأمامي P_v ، ولهذا نرسم بعد ايجاد المسقط الأمامي 'n من هذه النقطة 'n

مستقيما موازيا للأثر الأمامي P_v فيكون هذا المستقيم هو المسقط الأمامي لجبهة المستوي BN • يتحدد المسقط الأمامي 'b للنقطة B الواقعة على جبهة المستوي بنقطة تقاطع العمود المقام من b على خط الأرض (المحور X) مع المسقط الأمامي 'n'b لجبهة المستوي • ولاستكمال الحل ولايجاد مساقط المستقيم AB يجب أن نوجد مساقط نقطة أخرى تنتمي الى هذا المستوي كالنقطة A أو كأثره الأمامي أو الأفقي • ولما كان التدوير في مثالنا هذا يتم حول الأثر الأفقي P_h فان أثر المستقيم AB الأفقي سيبقى ثابتا في موقعه ، لأنه يقع على P_h • ولذلك نقول : اذا مددنا $A_1 B_1$ حتى يتقاطع مع الأثر الأفقي P_h فاننا سنحصل على النقطة m ، وهي الأثر الأفقي للمستقيم AB • وحين نمرر مستقيما من النقطتين m و b نحصل على المسقط الأفقي للمستقيم الذي يكون المقطع AB جزءا منه • أما موقع المسقط الأفقي a للنقطة A فانه يتحدد من تقاطع امتداد المستقيم m b مع العمود المقام من A_1 على الأثر الأفقي P_h للمستوي P • وأما المسقط الأمامي 'a فاننا نحصل عليه ، بعد تحديد المسقط الأمامي 'm للأثر الأفقي للمستقيم من خلال تقاطع امتداد المستقيم 'm 'b مع العمود المقام من a على محور X • وبهذا نحصل على المسقط الأمامي 'a 'b لمقطع المستقيم AB ، وهو المطلوب •

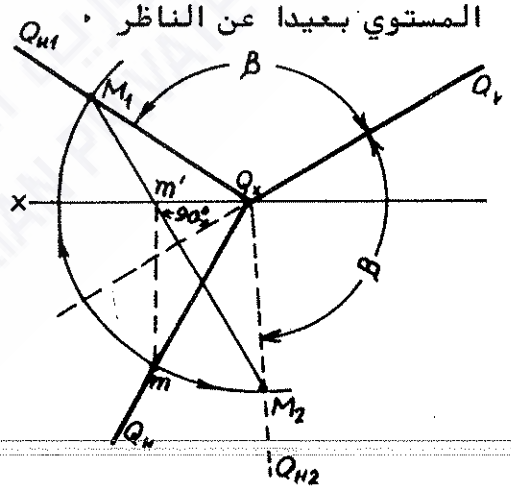
في الحالات السابقة درسنا موضوعة تطابق المستوي مع مستوي الاسقاط الأفقي بتدويره حول أثره الأفقي •وأما اذا كان المطلوب أن نوجد تطابق المستوي مع مستوي الاسقاط الأمامي فان التدوير يتم حول أثره الأمامي بعيدا عن الناظر ، أي : عكس الاتجاه المتخذ في الحالات السابقة •

فاذا كان المستوي المعني بالتطابق هو مستوي اسقاطي أفقي فان تدويره

حول أثره الأمامي من أجل تطابقه مع مستوي الاسقاط الأمامي يؤدي الى تطابق أثره الأفقي مع خط الأرض • وعلى هذا الأساس يتطابق الأثر الأمامي للمستوي الاسقاطي الأمامي مع خط الأرض عند تدويره حول أثره الأفقي، ليطابق مستوي الاسقاط الأفقي • من الواضح أن التطابق يمكن الحصول عليه بتدوير المستوي حول أثره باتجاه يعاكس الاتجاه المستخدم في الحالات السابقة، وفي هذه الحالة نلاحظ أن موضع الأثر الثاني التطابقي للمستوي بالنسبة لمحور الاسقاط يختلف بين حالة وأخرى ، ولكن الزاوية المحصورة بين الوضع التطابقي للأثر الثاني والأثر الأول (محور الدوران) تبقى ثابتة ، ونلاحظ ذلك في الشكلين (٢٥٧ و ٢٥٨) • ففي الشكل الأول نحصل على الوضع التطابقي Q_{v1} للأثر الأمامي للمستوي Q عند تدوير هذا المستوي حول أثره الأفقي Q_h باتجاه الناظر (المشاهد) • وأما الوضع التطابقي Q_{v2} فاننا نحصل عليه عند تدوير المستوي بعيدا عن الناظر •



شكل رقم (٢٥٧)

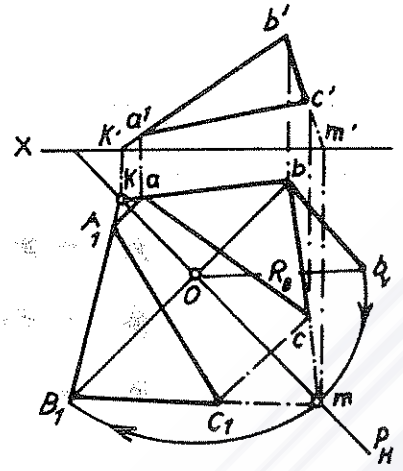


شكل رقم (٢٥٨)

وفي الشكل الثاني يتطابق المستوي Q مع مستوي الاسقاط الأمامي V عند تدويره حول أثره الأمامي Q_v • وعند تدويره بعيدا عن الناظر نحصل على الوضعية التطابقية Q_{h1} للأثر الأفقي Q_h، وعند تدويره

باتجاه الناظر نحصل على الوضعية التطابقية Q_{h2} لهذا الأثر .

مثـــال : المثلث ABC يقع في المستوي P . حدد الشكل الحقيقي للمثلث باستخدام التطابق مع مستوي الاسقاط الأفقي H .



شكل رقم (٢٥٩)

الحـــل : ان تطابق المستوي P مع المستوي H يتم عند تدويره حول أثره الأفـــقي P_h، وعندئذ يتخذ المثلث ABC الذي ينتـــمي الى المستوي P الوضع التطابقي $A_1B_1C_1$.

وللحصول على الوضعية التطابقية لأحـــد رؤوس المثلث (وليكن B_1) نتخـــذ الخطوات التالية (الشكل ٢٥٩) :

١ـ نقيم من النقطة b عمودا bo على الأثر الأفقي P_h للمستوي P .

٢ـ نحدد نصف قطر التدوير R ـ كما هو واضح في الحالات السابقـــة ـ بطريقة المثلث قائم الزاوية ، حيث يمثل نصف قطر التدوير R وتـر المثلث obb_1 الذي يمثل أحد ضلعيه القائمين مقطع المستقيم ab ويمثل الآخر المقطع bb_1 الذي يساوي المسافة من النقطة b' الى محور الاسقاط .

٣ـ نرسم من مركز التدوير O قوسا نصف قطره $R = o\,b_1$ ، يقطـــع امتداد bo في نقطة هي النقطة B_1 التي تمثل الوضعية التطابقيـة مـع المستوي H لرأس المثلث B .

٤ـ نحدد النقطتين m و K على الأثر الأفقي P_h ، اللتين تمثلان الأثريـــن الأفقيين للضلعين BC و BA ، ولاتغيران وضعهما خلال التدويـــر ، لأنهما تقعان على محور التدوير ، وبهذا تكون لدينا نقطتان معلومتان

للضلع AB في وضعه التطابقي ، هما B_1 و K ،وتكون لدينا أيضا نقطتان معلومتان للضلع BC في وضعه التطابقي ، هما B_1 و m • وحين نصل بين هذه النقاط نحصل على المستقيمين B_1K و B_1m اللذين يحددان الوضعية التطابقية للضلعين AB و BC •

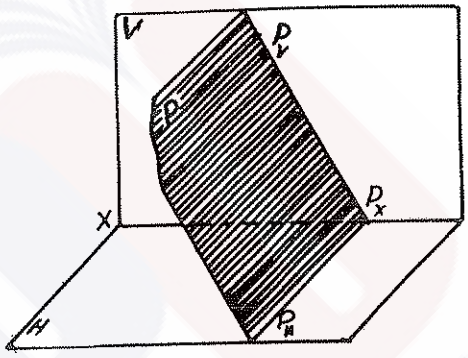
٥ـ نحدد النقطتين A_1 و C_1 من خلال تقاطع المستقيمين B_1k و B_1m مع الأعمدة المقامة من النقطتين a و c على الأثر الأفقي P_h •

٦ـ نوصل بين النقطتين A_1 و C_1 ، فنحصل على الوضعية التطابقية $A_1B_1C_1$ للمثلث ABC مع مستوي الاسقاط الأفقي H ، وتمثل هذه الوضعية الشكل الحقيقي للمثلث ABC وقياساته الحقيقية •

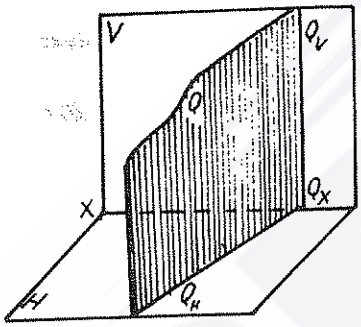
VIII-٣ـ تغيير أوضاع مستويات الاسقاط ،أو استخدام مستويات الاسقاط المساعدة :

ان أساس أو مبدأ هذه الطريقة هو المحافظة على وضع العناصرالهندسية: النقطة والمستقيم والمستوي في الفراغ دون أي تغيير أو تدوير • ولتسهيل حل مسائل العناصر الهندسية ذات الحالة العامة نستخدم مستويات اسقاطية مساعدة ، نستبدل بها مستوي الاسقاط الذي لايعامدها ، وهذا مايجعل وضع العنصر الهندسي بالنسبة للمجموعة الاسقاطية الجديدة وضعا خاصا ، واذا لم تساعد هذه المجموعة على اعطاء حل سهل للمسألة يمكن استبدال مستوي الاسقاط الأساسي الثاني بمستو اسقاطي آخر ، فتصبح لدينا مجموعة جديدة اسقاطية تتكون من المستويات المساعدة وحدها • مثلا : بدلا من المجموعة الاسقاطية الثنائية الأساسية التي تتكون من المستوي الأفقي H والأمامي V المتعامدين ($V \perp H$) نستخدم المجموعة الاسقاطية الثنائية التي تتكون من

المستوي V والمستوي الاسقاطي الأمامي P (V ⊥ P) الشكل (٢٦٠) ، أو نستخدم المجموعة التي تتكون من المستوي H والمستوي الاسقاطي الأفقي Q (H ⊥ Q) الشكل (٢٦١) . واذا لم يساعدنا ذلك على الوصول الى حل بالسهولة المطلوبة ، يمكننا حينئذ أن نستبدل مستوي الاسقاط الأساسي الثاني (H أو V) بمستو آخر عمودي على المستوي الاسقاطي المساعد ،

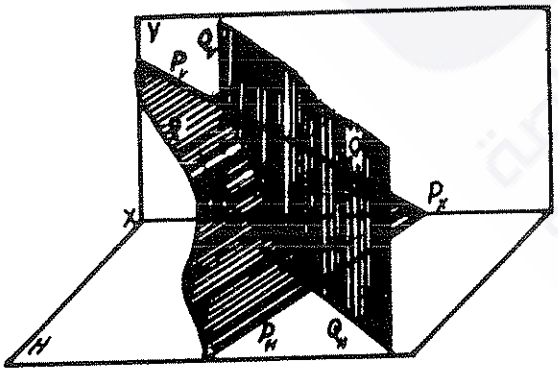


شكل رقم (٢٦٠)



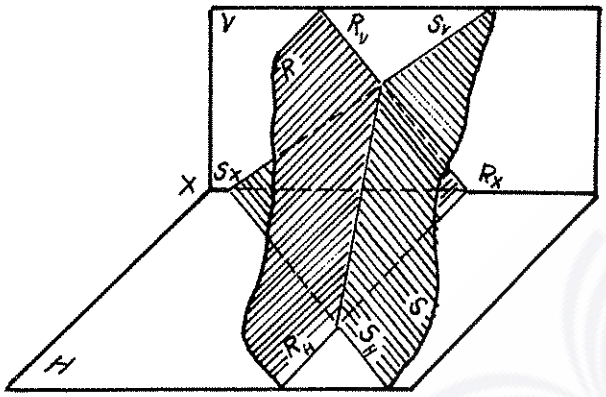
شكل رقم (٢٦١)

وبهذا تتكون المجموعة المستوية الاسقاطية من المستويين Q و P ونجد أن (P ⊥ Q) . وفي هذه الحالة يكون المستوي الاسقاطي الثاني المساعد كيفيا (حالة عامة) بالنسبة لمستويي الاسقاط الرئيسيين H و V . ففي الشكل (٢٦٢) نستبدل أولا المستوي V بمستو اسقاطي أفقي ، ومن ثم نستبدل المستوي H بالمستوي P العمودي على المستوي Q، فتكون المجموعة



شكل رقم (٢٦٢)

الاسقاطية من المستويين P و Q ، ويكون المستوي P ـ كما هو واضح في الشكل ـ كيفيا (حالة عامة) بالنسبة لمستويي الاسقاط H و V ٠ وفي الشكل (٢٦٣) نستبدل أولا المستوي H بمستو اسقاطي أمامي R ،ومن ثم نستبدل المستوي V بالمستوي S العمودي على R ،



شكل رقم (٢٦٣)

فتتكون المجموعةالاسقاطية من المستويين R و S ، ويكون المستوي S كيفيا بالنسبة للمستويين H و V ٠

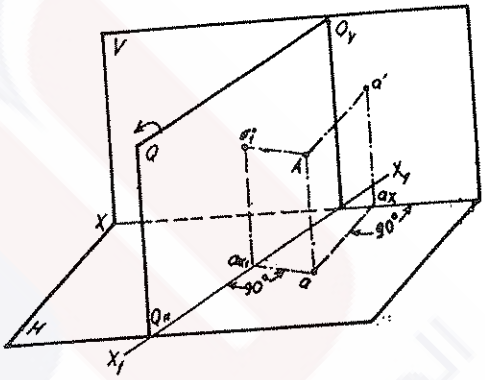
ان هذه الطريقة تتيح لنا أن ننقل عددا غير محدود من المجاميع الاسقاطية المستوية حتى نحصل على الوضعية التي تعطي الحل المطلوب للمسألة المعنية ٠

عند التمثيل الاسقاطي في مجموعة مستويات الاسقاط الجديدة نتبع نفس شروط وقواعد الاسقاط المستخدمة في مجموعة مستويات الاسقاط V و H ،ونرمز لمجموعة مستويات الاسقاط الجديدة والأساسية برمز كسري ، مثلا : V/H ، H/Q ، V/P ، P/Q ، ٠٠٠ وهكذا ٠

VIII ـ ٣ ـ ١ ـ تغيير (استبدال) مستو اسقاطي أساسي واحد :

لنفترض أن لدينا النقطة الفراغية A ،فاذا أسقطناها على المجموعة الاسقاطية V/H ،فسنحصل على مسقطيها : a على المستوي H ، و a' على المستوي V (الشكل ٢٦٤) ولو أخذنا الآن مستويا اسقاطيا أفقيا Q فان

خط تقاطعه مع المستوي H (أثره الأفقي Q_h) يمكن أن يُعد محورا اسقاطيا X_1-X_1 للمجموعة الاسقاطية التي تتكون من المستوي H والمستوي Q الذي يعامده • فعند اسقاط النقطة A على هذه المجموعة نرى أن مسقطها على المستوي H سيبقى نفس المسقط في الحالة السابقة ، أي : النقطة a • وأما مسقطها على المستوي Q فانه سيكون النقطة a_1' • واذا أقمنا حسب قواعد الاسقاط من النقطة a عمودا على خط التقاطع ، أي: محور الاسقاط (الأثر الأفقي Q_h) ، وأقمنا من النقطة a_1' عمودا آخر عليه فانهما يعامدان محور الاسقاط في نقطة واحدة هي a_{x1} • وحسب قواعد الاسقاط أيضا ، نجد أن بُعد المسقط الأمامي عن خط الأرض يمثل بُعد النقطة A عن مستوي الاسقاط الأفقي•



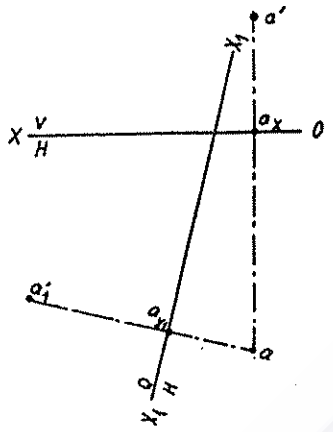
شكل رقم (٢٦٤)

ولما كان هذا البُعد لايتغير بتغير مستويات الاسقاط (ماعدا المستوي H) فان أيّ مسقط لهذه النقطة على مستو يعامد المستوي H يجب أن يبتعد عن فصله المشترك مع H نفس المسافة التي كان يبتعد فيها المسقط الأمامي a' على المستوي V عن خط الأرض • ولهذا يكفي أن نحدد هذه المسافة على العمود المقام من نقطة a_{x1} في المستوي Q ، لنحصل على المسقط الجديد a_1' للنقطة A على المستوي Q ، وهذا يعني أن المسافة

$$Aa = a'a_x = a_1'a_{x1} .$$

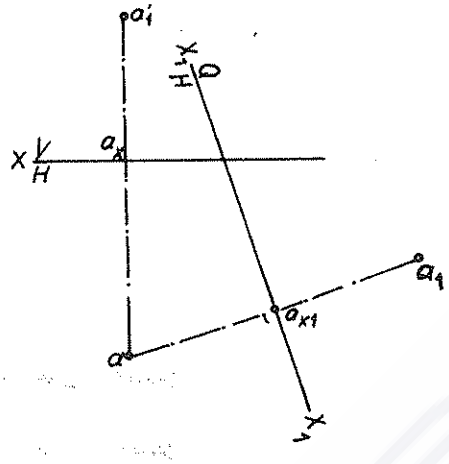
وللتعبير المستوي الاسقاطي ندُوّر المستوي Q حول الفصل المشترك في الاتجاه المحدد بالسهم في الشكل (٢٦٤) ، حتى يتطابق مع المستوي H ،

وبهذا يصبح لدينا في تعبير اسقاطي واحد مجموعتان اسقاطيتان : الأولى V/H ، والثانية H/Q • لدينا في الأولى المسقطان الأساسيان $a_1 a'$ الواقعان على مستقيم واحد يعامد خط الأرض ، أي المحور OX ، ويقطعه في النقطة a_x• وفي المجموعة الثانية سيكون محور الاسقاط X_1-X_1 ، وهو في الوقت نفسه الفصل المشترك بين المستويين H و Q • ان المسقط الأفقي في المجموعة الأولى هو النقطة a نفسها ، ولذلك يجب علينا للحصول على المسقط الأمامي علي المستوي Q حسب قواعد الاسقاط أن نقيم عمودا من النقطة a على محور الاسقاط الجديد X_1-X_1 ، فيقطعه في النقطة a_{x1} •ولما كنا قد ذكرنا أن بُعد النقطة عن مستوي الاسقاط الأفقي H لايتغير ، فان بُعد المسقط الأمامي عن محور الاسقاط في المجموعة الثانية يساوي بُعده عن محور الاسقاط في المجموعة الأولى ، وبتعبير آخر نقول : $a'_1 a_{x1} = a' a_x$ • وعلى هذا الأساس اذا حددنا على العمود المقام من النقطة a على محور الاسقاط X_1-X_1 ومن النقطة a_{x1} مقطعا طوله $a_x a'$ فاننا سنحصل على النقطة a'_1 المطلوبة (الشكل ٢٦٥) •

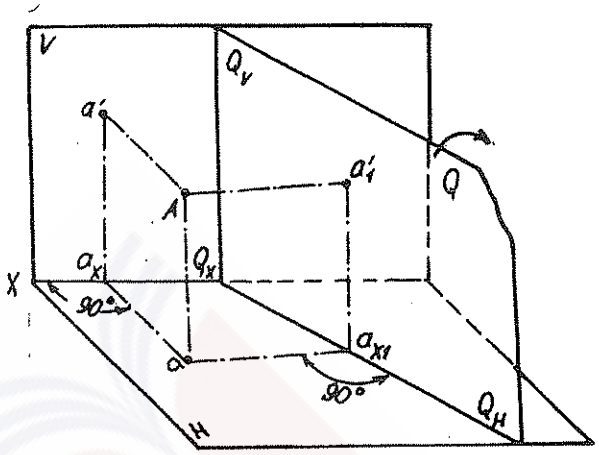


شكل رقم (٢٦٥)

اذا اخترنا وضع المستوي Q يمين النقطة A (الشكل ٢٦٦) فان الفصل المشترك بينه وبين المستوي H والمتمثل بالأثر الأفقي Q_h للمستوي Q يتخذ الوضعية التي يوضحها الشكل المذكور ، وعند تدوير المستوي Q بالاتجاه المحدد بالسهم حتى تطابقه مع المستوي H نجد أن الوضع الاسقاطي المستوي للمجموعتين V/H و H/Q ومحاور الاسقاط فيهما OX و X_1-X_1



شكل رقم (٢٦٧)

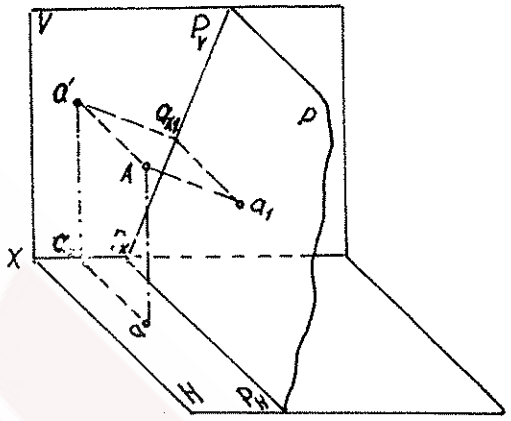


شكل رقم (٢٦٦)

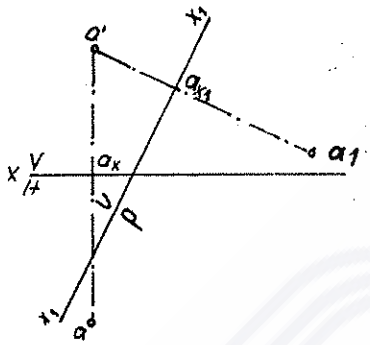
تتخذ الوضعية التي يوضحها الشكل (٢٦٧) • وأما طريقة تحديد مسقط النقطة A على المستوي Q ، أي:النقطة a'_1 فهي الطريقة المتبعة في الحالة السابقة •

وفي حالة خاصة نقول : اذا كان المستوي الاسقاطي الأفقي المساعد Q مارا من النقطة A فان اتجاه تدوير هذا المستوي يكون كيفيا ليطابق المستوي H ، ويعتمد على الوضعية المريحة للاسقاط الجديد على ورقة الرسم •

في حالة استخدام مجموعة V/P ، أي : عند استبدال مستوي الاسقاط الأفقي H بمستو عمودي P على مستوي الاسقاط الأمامي V ، نتبع الخطوات السابقة نفسها ، وذلك باستخدام a' بدلا من a • فنقيم من a' عمودا على P_v ، لنحدد a_{x1} ، ومنها نقيم عمودا على P_v في المستوي P نفسه، ونأخذ عليه بُعدا يساوي البُعد aa_x ، فنحصل على المسقط الجديد a_1 • ويعني هذا أننا أخذنا : $a_1a_x = aa_x = Aa'$ • وهذا موضح فراغيا في الشكل (٢٦٨) واسقاطيا في الشكل (٢٦٩) •



شكل رقم (٢٦٨)



شكل رقم (٢٦٩)

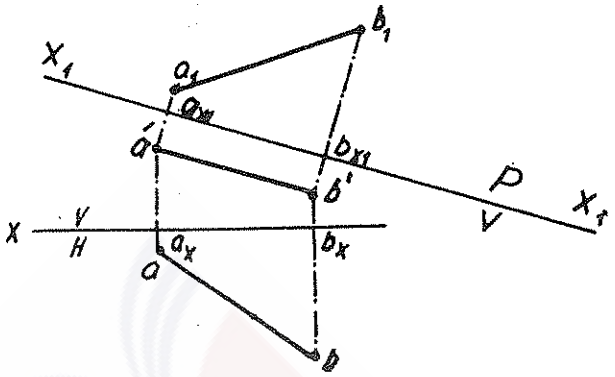
عند استخدام هذه الطريقة بالنسبة للمستقيمات نطبق الخطوات السابقة نفسها ، لأن تحديد وضع المستقيم بالنسبة للمجموعة الجديدة يمكن تحقيقه من تحديد وضع نقطتين واقعتين عليه بالنسبة لهذه المجموعة •

اذا كان استخدام هذه الطريقة لايعني شيئا للنقطة الواحدة ، فانه يحتل أهمية كبيرة بالنسبة للعناصر الهندسية الأخرى (المستقيم والمستوي)• فبهذه الطريقة يمكن أن ننقل وضعية العنصر الهندسي الى وضعية خاصة بالنسبة لمجموعة مستويات الاسقاط الجديدة تسهل أو تعطي مباشرة الحل المطلوب •

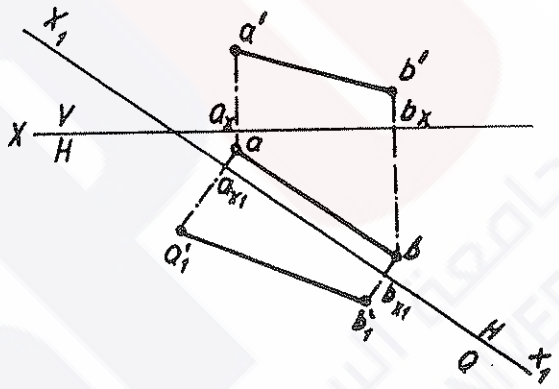
مثال ١ : حدد طول مقطع المستقيم AB المحدد بمساقطه •

الحل : يمكن استخدام طريقة المثلث قائم الزاوية أو طريقة التدوير للحصول على الطول الحقيقي للمقطع AB ، ولكننا نعرف أن مسقط المستقيم الموازي لمستوي الاسقاط لايُحدث على هذا المستوي أي تشويه ، ويعبر عن طوله الحقيقي وميله في الفراغ بالنسبة لمستويات الاسقاط الأخرى ، ولذلك

يمكن استبدال أحد مستويات الاسقاط بمستو اسقاطي مساعد يوازي مقطع المستقيم AB ٠وهذا مايمكن تحقيقة سواء أكان ذلك باستبدال مستوي الاسقاط الأفقي H ، أي:استخدام مجموعة P/V (الشكل ٢٧٠) ، أم باستبدال مستوي الاسقاط الأمامي V ،أي: باستخدام مجموعة H/Q(الشكل ٢٧١) ٠



شكل رقم (٢٧٠)



شكل رقم (٢٧١)

لندرس بالتفصيل الطريقة المستخدمة في الحالة الثانية ، أي الحالة التي يوضحها الشكل (٢٧١) : للتوصل للحل المطلوب يجب أن نتبع الخطوات التالية :

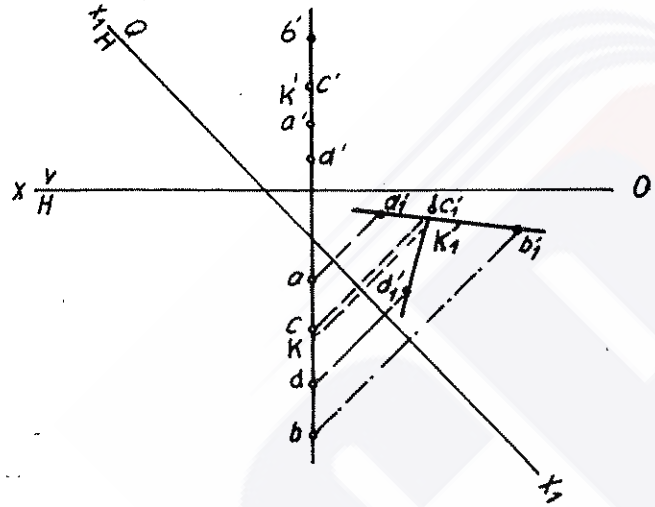
١ـ نستبدل المستوي V بالمستوي Q العمودي على المستوي H والموازي للمستقيم AB ، وبذلك يكون أثره الأفقي Q_h موازيا للمسقط الأفقي ab للمستقيم ، ويصبح Q_h هو محور الاسقاط الجديد H/Q ٠

٢ـ نقيم من النقطتين a و b أعمدة على المحور H/Q ، فنحصل بذلك على النقطتين a_{x1} و b_{x1} ، ونحدد على امتداد هذه الأعمدة ومن هاتين النقطتين مقطعين ، طولهما $a'a_x$ و $b'b_x$ على التوالي،فنحصل

على المسقطين الجديدين a'_1 و b'_1 للنقطتين A و B اللتين تحددان مقطع المستقيم AB وحين نصل بين النقطتين نحصل على مسقط المستقيم $a'_1\ b'_1$ الذي يمثل الطول الحقيقي للمستقيم AB ٠

مثال ٢ : حدد العلاقة المتبادلة بين المستقيمين AB و CD المحددين بمساقطهما دون استخدام مستوي الاسقاط الجانبي (الشكل ٢٧٢) ٠

الحل : نستبدل مستوي الاسقاط الأمامي V بمستوي اسقاطي مساعد Q عمودي على المستوي H ، ونرسم محور الاسقاط الجديد H/Q ، وبعد ذلك نوجد المساقط الجديدة d_1 ، c_1 ، b_1 ، a_1 للنقاط D ، A,B,C ٠ ان العلاقة بين المسقطين الجديدين $a_1 b_1$ و $c_1\ d_1$ للمستقيمن تحدد العلاقة المتبادلة

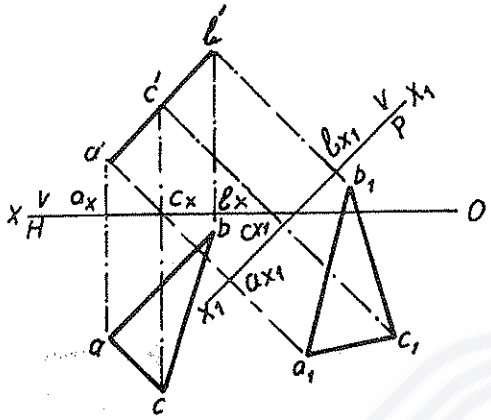


شكل رقم (٢٧٢)

بينهما في الفراغ ٠ وفي مثالنا هذا نجد أن المستقيمين متقاطعان في النقطة K ، نحدد من مسقطها k_1 على المستوي Q مسقطيها الأفقي k والأمامي k'٠

بالنسبة للمستويات المحددة بنقاط واقعة عليها أو مستقيمات تابعة لها أو المحددة بشكل هندسي منتظم (مثلث أو مربع) نجد أن تطبيق هذه الطريقة يتم بنفس الخطوات والأسلوب السابق ٠ وأمّا اذا كان المستوي محددا بآثاره فسيكفي نقل احدى نقاط أثره وفق الخطوات السابقة ٠ لنوضح ذلك بالأمثلة التالية :

مثـــال ٣ : حدد الشكل الحقيقي للمثلث ABC المحدد بمسقطيه (الشكل (٢٧٣) .



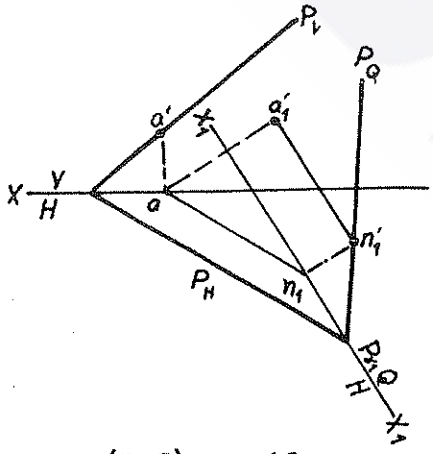
شكل رقم (٢٧٣)

الحـل: يمكن أن نحصل وفق الأسس السابقة نفسها على مساقط تعبر عن الوضعية الحقيقية (القياسات والميل) للمثلث بسهولة وبصورة مباشرة عندما يوازي المثلث أحد مستويات الاسقاط ، فلايحدث حينئذ لمسقطه على هذا المستوي أي تشوه.

ولذلك نختار مجموعة اسقاطية مساعدة من المستويين V و P بحيث يكون المستوي P عموديا على المستوي V وموازيا للمستوي ABC ، فيكون محور الاسقاط الجديد V/P موازيا لمسقط المثلث a'b'c' على المستوي V . نرسم من النقاط a' ، b' و c' أعمدة على محور الاسقاط الجديد V/P ، ونحدد النقاط a_{x1} ، b_{x1} و c_{x1} ، ونأخذ على هذه الأعمدة المسافات :

$a\,a_x = a_1\,a_{x1}$ ، $b\,b_x = b_1\,b_{x1}$ و $c\,c_x = c_1\,c_{x1}$. وحين نصل بين النقاط a_1 و b_1 و c_1 نحدد مسقط المثلث ABC على المستوي P بقياساته وشكله الحقيقي .

مثـــال ٤ : المستوي P محدد بأثريه في مجموعة الاسقاط الأساسية V و H . ارسم أثري هذا المستوي في مجموعة الاسقاط المساعدة التي تتكون من مستوي الاسقاط الأفقي H والمستوي الاسقاطي الأفقي المساعد Q .



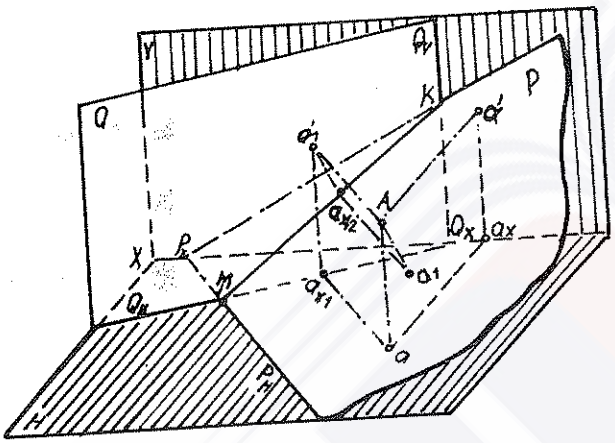
شكل رقم (٢٧٤)

الحـــل : نلاحظ أن أثر المستوي P في مستوي الاسقاط H (P_h) يبقى كما هو ، ونرسم محور الاسقاط الجديد H/Q (الشكل ٢٧٤) • تمثل احدى نقاط الأثر الجديد P_q نقطة التقاء المحور H/Q مع الأثر P_h ، وهي النقطة P_{x1}• لتحديد الأثر الجديد يكفي الآن أن نوجد نقطة أخرى واقعة عليه ، ولأجل ذلك نأخذ النقطة A الواقعة على أثر المستوي P_v ، ونرسم مسقطيها في مجموعة الاسقاط الجديدة H/Q (a_1' و a)، ثم نمرر في المستوي P من هذه النقطة مستقيما أفقيا (أفق المستوي P) • وفي هذه الحالة نجد أن مسقطه في مستوي الاسقاط المساعد Q يوازي محور الاسقاط الجديد H/Q ، وأن مسقطه في مستوي الاسقاط H يوازي أثر المستوي P_h • ان أثر هذا المستقيم في مستوي الاسقاط المساعد Q يقع على أثر المستوي P في هذا المستوي (P_q) • ولهذا نحصل بتعيين أثر هذا المستقيم (n_1'(N) على النقطة الثانية التي تحدد الأثر P_q وحين نصل بين النقطتين P_{x1} و n_1' نحصل على P_q •

VIII-٣-٢- استخدام مستويين مساعدين للاسقاط (استبدال المجموعة الأساسية للاسقاط كليا) :

ان استبدال المجموعة الأساسية للاسقاط كليا يتم في مرحلتين متتاليتين : في الأولى يتم استبدال أحد مستويات المجموعة الرئيسية للاسقاط بمستوي اسقاط مساعد،فتصبح لدينا مجموعة اسقاط مساعدة متكونة من H و Q أو V و P مثلا ، ومن ثم نوجد المسقط الجديد على مستوي الاسقاط المساعد • وبعد ذلك تتم المرحلة الثانية باستبدال مستوي الاسقاط الأساسي الثاني بمستوي اسقاط مساعد ثان يعامد مستوي الاسقاط المساعد الأول ، فتصبح لدينا في هذه الحالة مجموعة مستويات اسقاط جديدة لاعلاقة لها بالمجموعة الرئيسية •

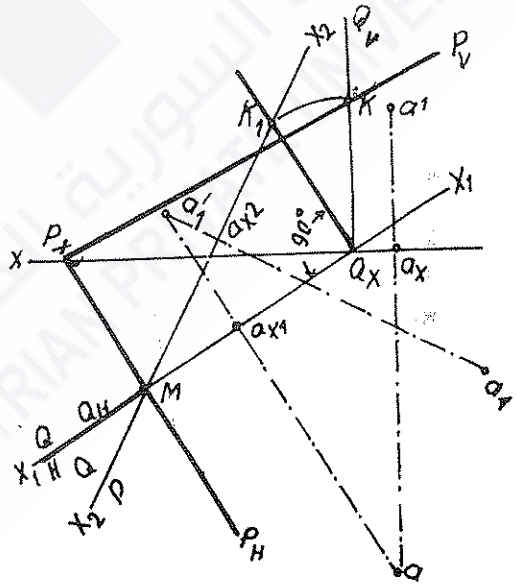
لنتتبع وضعية نقطة ما (ولتكن A) ومساقطها الجديدة في مجاميع الاسقاط المساعدة عند الاستبدال المتتالي لمستويي الاسقاط الأساسيين V و H . في مجموعة الاسقاط الأساسية V و H هذه نجد أن النقطة محددة بمسقطيها (a,a')، كما هو واضح في الشكل (٢٧٥) .



شكل رقم (٢٧٥)

نختار أولا مستويا Q يعامد المستوي H ، ويقع مثلا على يسار النقطة A (الشكل الفراغي ٢٧٥)،ويكون محور الاسقاط الجديد للمجموعة الاسقاطية الجديدة Q / H هو الأثر الأفقي Q_h للمستوي Q ،ونرمز له في التعبير الاسقاطي بالمحور X_1X_1 (الشكل ٢٧٦).

لتحديد المسقط الجديد a'_1 للنقطة A على المستوي Q نمرر مستقيما من النقطة a عموديا على المحور X_1X_1، ونحدد عليه $a_{x1}a'_1 = a_x\ a'$، فنحصل على النقطة المطلوبة a'_1 (الشكل ٢٧٦)، وبهذا تصبح النقطة A محددة في المجموعة الاسقاطية H/Q بمسقطيها ($a_1\ a'_1$).

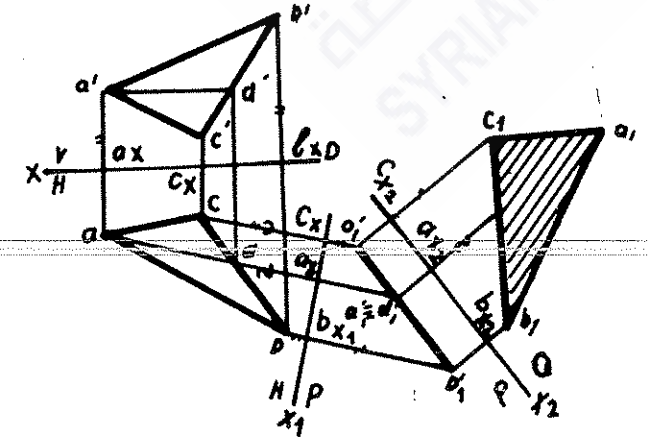


شكل رقم (٢٧٦)

بعد ذلك نقوم باستبدال المستوي H بالمستوي P العمودي على المستوي Q، ونحصل على مجموعة اسقاطية جديدة Q/P . في هذه المجموعة يمثل محور الاسقاط خطّ تقاطع المستويين Q و P ، وهو المستقيم KM (الشكل ٢٧٥) ، ونرمز له في التعبير الاسقاطي بـ $X_2 X_2$ (الشكل ٢٧٦) ونحصل على وضعيته حين نطبق النقطة K على المستوي H . نرمز للوضعية التطابقية للنقطة K في التعبير الاسقاطي بـ K_1 ، وحين نمرر مستقيما من النقطة K_1 والنقطة M الثابتة في وضعها نحصل على وضعية محور الاسقاط الثاني الجديد $X_2 X_2$.

من خلال الشكل (٢٤٨) نلاحظ أن $a_1 a_{x2} = A a'_1$ ، لأن المستوي P عمودي على المستوي Q ($P \perp Q$) ، ولايجاد وضعية النقطة a_1 في التعبير الاسقاطي المستوي في المجموعة Q/P ، أي:عندما نطبق المستوي P على المستوي Q ، يكفي أن نقيم من النقطة a'_1 عمودا على المحور $X_2 X_2$ ، فيقطعه في a_{x2} ، ومن هذه النقطة نأخذ على هذا العمود المسافة $a_{x2} a_1 = a_{x1} a$ ،فنحصل على النقطة المطلوبة .

مثال : حدد الشكل الحقيقي للمثلث ABC المحدد بمسقطيه abc و a'b'c' في حالته العامة بالنسبة لمجموعة الاسقاط الأساسية V/H (الشكل ٢٧٧) .



شكل رقم (٢٧٧)

الحـــل : يمكن التعبير عن الشكل الحقيقي للعنصرالهندسي الفراغي المستوي في التعبيرالاسقاطي عندمايوازي هذاالعنصرأحد مستويات الاسقاط،ويكون عندئذ مسقط هذاالعنصرعلى مستوي الاسقاط الذي يوازيه معبرا عن شكله الحقيقي دون حدوث أي تشويه أوتحريف • ومن الواضح أن المستوي الموازي لأحد مستويات الاسقاط لابدأن يكون يكون عموديا على مستوي الاسقاط الآخر • ولهذا لابدّ قبل كل شيءأن نستبدل أحد مستويات الاسقاط بمستو اسقاطي مساعد بحيث يصبح العنصر الهندسي في المجموعة الاسقاطية الجديدة عموديا على أحد مستوياتها • وبعد ذلك نستبدل المستوي الاسقاطي الأساسي الثاني بمستوعمودي على المستوي المساعد الأول بحيث يصبح العنصرالهندسي موازيالأحد مستويات المجموعة الاسقاطية الجديدة،ويكون مسقطه على هذاالمستوي هوالمعبرعن شكله وقياساته الحقيقية •

ان عملية الاستبدال هذه يوضحهاالشكل (٢٥٠) وان تفاصيلها موضحة فيمايلي :

نستخدم مستويا اسقاطيا مساعدا P عموديا على مستوي الاسقاط الأفقي H وعموديا في الوقت نفسه على مستوي المثلث ABC• نوجد وفق خطوات العمل (التي ذكرناها في VII ـ٣ـ١ـ) مسقط المثلث ABC على مستوي الاسقاط المساعد P ،فنحصل على المسقط $a_1'b_1'c_1'$• نستخدم الآن مستويا اسقاطيا مساعدا ثانيا Q عموديا على المستوي P وموازيا لمستوي المثلث ABC،وبهذا تصبح لدينا مجموعة مستويات اسقاط جديدة من المستويين P و Q ،لاعلاقة لها بمجموعة الاسقاط الأساسية H و V •

ان ايجاد المسقط الجديد على المستوي Q يتم بالخطوات السابقة نفسها ، أي: باقامة أعمدة من النقاط c_1' ، b_1' ، a_1' على محور الاسقاط الجديد P/Q ، فنحصل على النقاط c_{x2} ، b_{x2} ، a_{x2} ،نأخذ منها على الأعمدة المرسومة المسافات : $aa_{x1} = a_{x2}a_1$ و $bb_{x1} = b_{x2}b_1$ و $CC_{x1} = C_{x2}C_1$ • فنحصل على المساقط الجديدة a_1 و b_1 و c_1 للنقاط A و B و C على المستوي Q • وحين نصل بين هذه النقاط نحصل على مسقط المثلث $a_1b_1c_1$ الذي يعبر عن الشكل الحقيقي للمثلث ABC •

الفصل التاسع :

المنحنيات

الخطوط والسطوح المنحنية

- معلومات عامة .
- تحديد طول مقطع منحن .
- الخطوط الحلزونية الاسطوانية .
- الخط الحلزوني المخروطي واسقاطه ونشره .
- منحنيات السطوح (السطوح المنحنية)
- المستويات المماسة للسطوح المنحنية البسيطة .

IX ـ١ـ معلومات عامة :

قبل دراسة السطوح المنحنية واسقاطها لابد أن نتوقف عند وضع الخطوط المنحنية في الفراغ واسقاطها • هذه الخطوط يمكن أن تكون :

١ـ مستوية : تقع جميع نقاطها في مستو واحد •

٢ـ فراغية : لايمكن احتواء جميع نقاطها في مستو واحد •

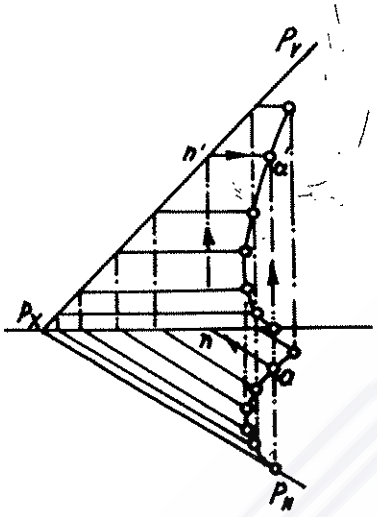
مثال النوع الأول : الدائرة والقطع الناقص والقطع الزائد ،وحلزون أرخميدس•

مثال النوع الثاني : الخطوط الحلزونية التي سنعرضها لاحقا •

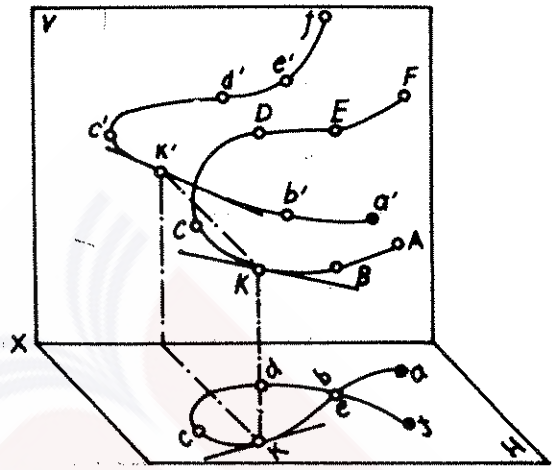
لرسم مساقط الخطوط المنحنية ، سواء أكانت المستوية أو الفراغية ، يغدو من الضروري أن نرسم مساقط مجموعة من النقاط الواقعة على الخط المنحني ، الشكل (٢٧٨) يوضح اسقاط منحن فراغي ، والشكل (٢٧٩) يوضح طريقة رسم الخط المنحني المستوي •

ان مساقط المستقيم المماسّ للخط المنحني في الفراغ مماسة أيضا لمساقط الخط المنحني في مساقط نقطة تماسه الفراغية ، وان المستوي الاسقاطي المار من المماس يمس الخط المنحني في الفراغ أيضا •

عند تحديد الخطوط المنحنية المستوية والفراغية بواسطة مساقطها يجب اعطاء التصور الواضح عن هذا المنحني في الفراغ ، وذلك بتحديد بعض النقاط التي تميزه على مساقطه أو التي تحدد موضعه بالنسبة لمستويات

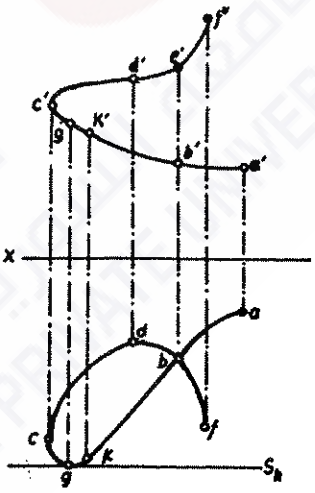


شكل رقم (٢٧٩)



شكل رقم (٢٧٨)

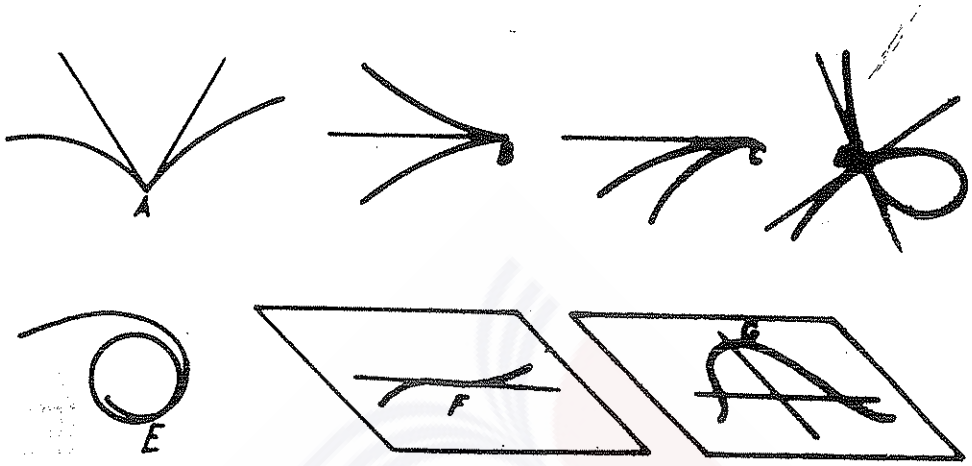
الاسقاط مثلا : على المساقط يمكن تحديد أبعد نقطة من مستويات الاسقاط وأقرب نقطة اليها • ولأجل ذلك يجب أن نمرر مستويا اسقاطيا يمس الخط المنحني ويوازي مستوي الاسقاط المعني • فبواسطة المستوي الاسقاطي S والموازي لمستوي الاسقاط V (الشكل ٢٨٠) نستطيع تحديد أبعد نقطة من المنحني في الفراغ عن المستوي V ، وهي النقطة G •



شكل رقم (٢٨٠)

ونلاحظ في الخطوط المنحنية بعض النقاط ذات المواصفات أو الميزات الخاصة ، يشير الشكل (٢٨١) الى بعضها :

١ـ نقطة الانكسار أو النقطة الرأسية A : هي النقطة التي يغير عندها



شكل رقم (٢٨١)

المنحني ومماسه اتجاههما بصورة حادة تحت زاوية ما ٠

٢ـ نقطة الرجوع : هي النقطة التي يغير عندها المنحني اتجاهه مع بقاء مماس مشترك واحد للمنحني في اتجاهيه ٠

النقطة B : تسمى نقطة الرجوع من الصنف الأول ٠

النقطة C : تسمى نقطة الرجوع من الصنف الثاني ٠

٣ـ النقطة المزدوجة أو العقدية أو نقطة التقاطع الذاتي D : هي النقطة التي يتقاطع فيها المنحني مع نفسه ، ويكون له فيها مماسان مختلفا الاتجاه ٠

٤ـ نقطة التماس الذاتي E : هي النقطة التي يلتقي فيها المنحني مع نفسه بالتماس ، ويكون له فيها مماس واحد ٠

ويمكن أن نشير هنا الى نقطة أخرى في الخطوط المنحنية المستوية ، وهي نقطة الالتواء E التي تمثل نقطة تقاطع المنحني مع مماسه دون تغيير في حركة مساره ٠ وهنالك أيضا نقطة القمة G حيث يكون الناظم (المستقيم العمودي على مماس المنحني) الذي يمر منها محورا لتناظر بعض أجزاء

المنحني • هاتان النقطتان G و E لاتنتميان على الرغم من خصوصيتهما الى مجموعة النقاط السابقة التي تميز المنحني •

ولتحديد طبيعة المنحنيات المستوية ونقاطها يكفينا مسقط واحد (اذا لم يكن خطا مستقيما) ، لأن أية خاصية لهذا المسقط تعبر عن خاصية المنحني نفسه ، وأما المنحنيات الفراغية فهي تتطلب على الأقل مسقطين لتحديد طبيعتها • مثلا : الشكل (٢٨٠) يوضح أن وجود المسقط الأمامي مع المسقط الأفقي يبين بوضح أن نقاط المنحني لاتتقاطع على الرغم من أن المسقط الأفقي يعكس انطباعا بوجود تقاطع خطوط المنحني في نقطتي b و e •

IX ـ٢ـ تحديد طول مقطع منحن :

ان طول مقطع منحن سواء أكان مستويا أم فراغيا ، يحدد بصورة تقريبية باستبدال الخط المنحني بخط متكسر يمثل هذا المنحني (هذا لايشمل الخطوط المنحنية التي يمكن أن نقيس أطوالها بحسابات اعتيادية غير معقدة) ، ويمثل مجموع أطوال مفاصل هذا الخط المتكسر طول مقطع المنحني المستبدل •

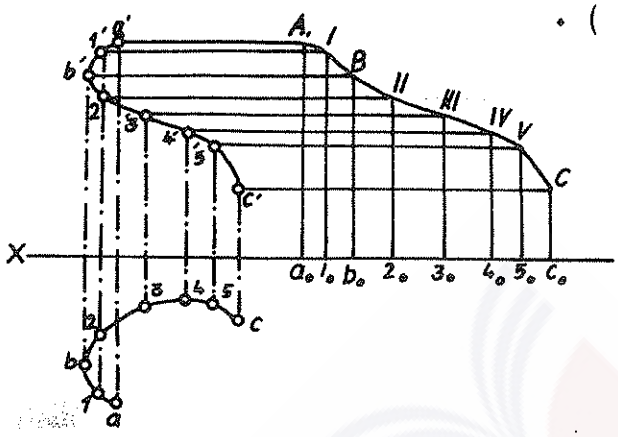
ولتقليل نسبة الخطأ يجب أن نأخذ مقطع مفصل الخط المتكسر بحيث يكون اختلافه عن منحى الخط المنحني قليلا ، فيمثل وتر القوس الذي يحدد المقطع المناظر من هذا المنحني • والشكل (٢٨٢) يوضح هذه الطريقة في حساب طول المنحني ABC والتي تتم وفق الخطوات التالية :

١ـ يُجزأ المسقط الأفقي للمنحني abc الى مقاطع صغيرة و (تنُشر) أو (تفُتح) بخط مستقيم على المحور X بحيث يساوي طول المقاطع ($a_o\ 1_o$ ، $1_o\ b_o$ ، ... وهكذا) أوتار مقاطع المنحني

(a 1 , 1 b , ... وهكذا) ٠

٢ـ نقيم أعمدة على المحور X من النقاط a_o ، 1_o ، b_o ، ... الخ ٠

٣ـ نحد على المسقط الأمامي للمنحني a'b'c' المساقط الأمامية لنقاط تجزئة المسقط الأفقي a' ، 1' ، b' ، ... الخ ٠



شكل رقم (٢٨٢)

٤ـ ان نقاط تقاطع المستقيمات الأفقية المارة من a' ، 1' ، b' ، ...الخ مع الأعمدة المقامة على المور (X) من النقاط a_o ، 1_o ، b_o ، ... الخ تحدد نقاط مفاصل الخط المتكسر A ، 1 ، B ، ... الخ ، ويمكن أن يُعد طول هذا الخط المتكسر مساويا لطول المنحني الفعلي ABC تقريبا ٠

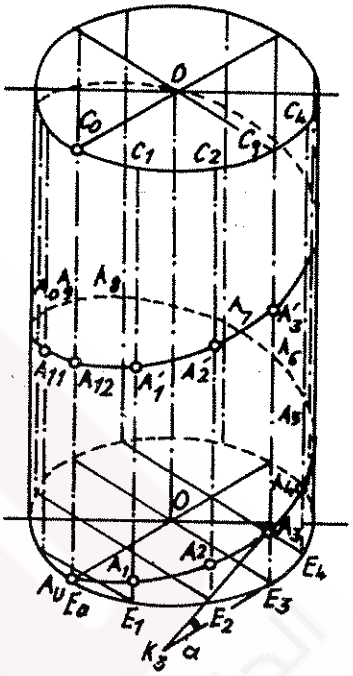
IX ـ٣ـ الخطوط الحلزونية الاسطوانية :

IX ـ٣ـ١ـ مواصفات الخطوط الحلزونية الاسطوانية :

تشمل هذه الخطوط منحى مسار نقطة تتحرك بسرعة منتظمة على المستقيم المولد (المُنشئ) لاسطوانة قائمة في نفس الوقت الذي يدور فيه هذا المستقيم بسرعة منتظمة حول محور الاسطوانة ، ويسمى المستقيم الذي يوازي محور الدوران بالمستقيم المولد للسطح الاسطواني والذي يُولّد بدورانه حول هذا المحور سطحا اسطوانيا ٠

يوضح لنا الشكل (٢٨٣) انشاء الخطوط الحلزونية الاسطوانية على سطح اسطوانة من حركة النقطة A على المستقيم المولد EC ودورانه حول المحور 00 • وفي هذا الشكل نوضح عدة أوضاع للمستقيم المولد خلال دورانه $E_o\ C_o$ ، $E_1\ C_1$ ، $E_2\ C_2$ ••• الخ بحيث تكون أطوال الأقواس المحددة بهذه المستقيمات متساوية (لأن سرعة حركة المستقيم المولد تكون منتظمة) ، أي :

$E_o\ E_1 = E_1\ E_2 = E_2\ E_3 =$ ••• الخ ، ويكون كل منها يساوي $\frac{\pi d}{n}$ ، حيث d قطر الاسطوانة و n عدد التقسيمات (في هذا الشكل n = 12) • واذا رمزنا للوضع الابتدائي لحركة النقطة بـ A_o فان أوضاعها التالية ستكون على التوالي A_1 ، A_2 ، A_3 ، ••• الخ •



شكل رقم (٢٨٣)

اذا افترضنا أن النقطة A_o عند انتقال المستقيم المولد من الوضع E_oC_o الى الوضع $E_1\ C_1$ تنتقل الى الوضع A_1 ، فان المقطع E_1A_1 يحدد المسافة التي قطعتها النقطة A على المستقيم المولد خلال فترة انتقالها من وضعها الأولي A_o الى الوضع A_1 • عند الانتقال الى الوضع الثاني للمستقيم المولد $E_2\ C_2$ ستنتقل النقطة A الى مسافة $2E_1A_1 = E_2A_2$ ،•••الخ، وهكذا حتى يصنع المستقيم المولد E C دورة كاملة ويعود الى وضعه الابتدائي، وفي هذه الحالة تنتقل النقطة A الى ارتفاع $12E_1A_1 = E_oA_{12}$ • وعند

استمرار المستقيم المولد بالدوران تبدأ النقطة A بتكوين لغـــــة أو دورة أخرى للخط الحلزوني متنقلة في الأوضاع A'_1 ، A'_2 ، A'_3 ، ... الخ .

وتسمى المسافة بين النقطتين A_o و A_{12} الواقعتين على مستقيـــم مولد واحد للاسطوانة بخطوة الخط الحلزوني .

وتكون الخطوة مختلفة لمختلف الخطوط الحلزونية ، أي يمكـــن أن تحدد وفق الظروف المختلفة .

المسافة من النقطة A الى المحور 00 تسمى بـ (نصف قطر الخـــط الحلزوني) . والمحور 00 يسمى بـ (محور الخط الحلزوني) .

يساوي نصف قطر الخط الحلزوني نصف قطر اسطوانة التدوير التي يقـع الخط الحلزوني على سطحها . ويُعدّ قطر الاسطوانة وخطوة الخط الحـلزوني قياسين يحددان صفات الخطوط الحلزونية الاسطوانية .

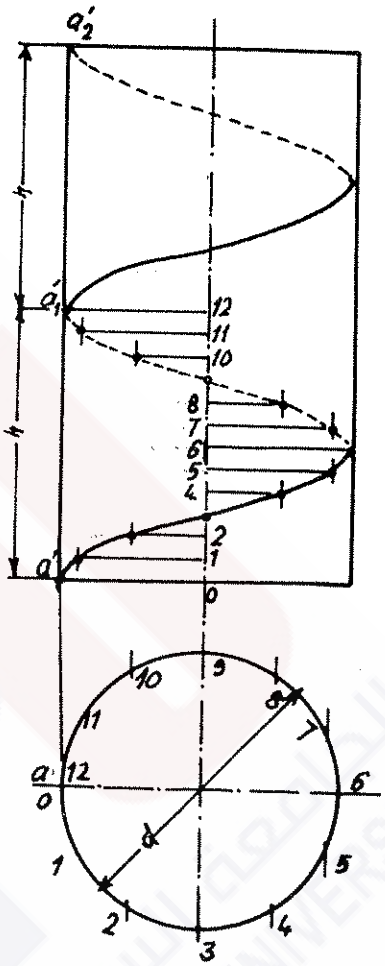
لايمكن أن يضم مستو واحد جميع نقاط الخط الحلزوني ، كما هو الحال بالنسبة للدائرة أو القطع الناقص وغيرهما . ولذلك لايمكن للخط الحلزوني أن يكون منحنيا مستويا بل هو منحن فراغي دائما .

IX ـ٣ـ٢ـ اسقاط الخطوط الحلزونية الاسـطوانية :

لايجاد مساقط الخط الحلزوني لابد أن نرسم مساقط السطح الاسطوانـــي أولا ، وذلك بافتراض أن قاعدته توازي أحد مستويات الاسقاط (في الشكـل ٢٨٤ توازي مستوي الاسقاط الأفقي) . وفي هذه الحالة يتطابق مسقط السطـــــح الاسطواني على هذا المستوي مع مسقط قاعدته الدائرية ، أي : يكون على شكل دائرة ، ويمثل مسقطه الأمامي مستطيلا .

ان دائرة قاعدة الاسطوانة (في المسقط الأفقي) وخطوة الخط الحـلزوني

(مقطع المستقيم الذي يساوي h) التي تحدد على محور المسقط الأمامي للسطح الاسطواني تقسّم الى (n) من الأجزاء المتساوية (في الشكل ٢٨٤ : n = 12) • وان الوضع الابتدائي للنقطة A يحدد بمسقطيها (a,a') ، وتحدد هذه النقطة في المسقط الأفقي بالرمز 0 (صفر) أيضا •



شكل رقم (٢٨٤)

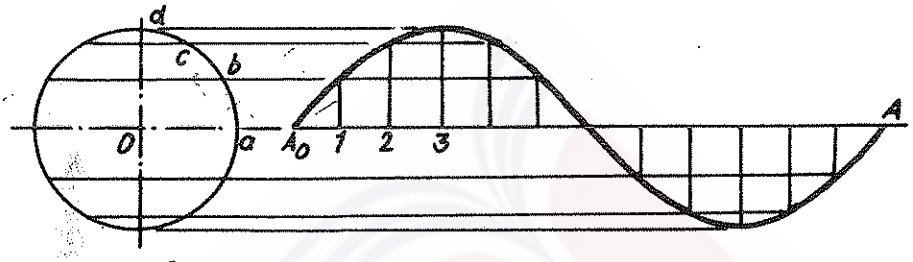
ولما كان محور السطح الاسطواني عموديا على المستوي H ، فان المسقط الأفقي للخط الحلزوني يتطابق مع المسقط الأفقي للسطح الاسطواني ، ويبقى علينا أن نوجد المسقط الأمامي للخط الحلزوني • وهذه العملية سهلة جدا ، وتنبع من عملية انشاء الخط الحلزوني نفسه ، لأنه مسار لنقطة ثنائية الحركة •

ولهذا يمكن أن نرسم المسقط الأمامي من النقاط الناتجة عن تقاطع الشاقول المقام من النقاط الأفقية 0 ، 1 ، 2 ، ••• الخ مع المستقيمات الأفقية المرسومة من نقاط التقسيم المحددة على محور السطح الاسطواني في المسقط الأمامي '0 ، '1 ، '2 ، ••• الخ •

واذا ماكررنا هذه العمليات وفق عدد الخطوات التي قسّم اليها المسقط الأمامي للسطح الاسطواني نحصل على كامل المسقط الأمامي للخط الحلزوني ، ونلاحظ أن المسقط الأمامي للخط الحلزوني يمثل منحنيا جيبيا •

فاذا طلب منّا أن نرسم منحنيا يمثل تغير جيب الزاوية بتغير الزاوية

(الشكل ٢٨٥) فسيكفينا أن نسقط النقاط b ، c ، d ، ... الخ (التي تتوزع على مسافات متساوية على محيط الدائرة) على الأعمدة المقامة من النقاط 1 ، 2 ، 3 ، ... الخ (التي تقسّم مقطع المستقيم A_o A الى



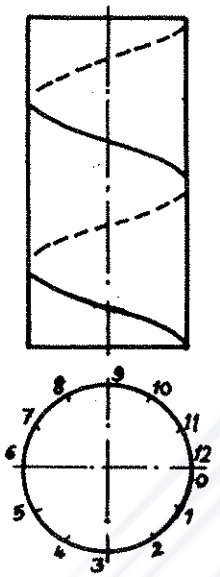
شكل رقم (٢٨٥)

عدد يساوي أجزاء الدائرة) • واذا قارنا هذا المنحني بالمنحني المرسوم في الشكل (٢٨٤) نجد بسهولة أنهما يتماثلان • ويعني هذا أن المسقط الأمامي (في مثالنا هذا بشكل خاص أو في أي مسقط على المستوي الموازي لمحور السطح الاسطواني بشكل عام) للخط الحلزوني سيرسم كمنحن جيبي •

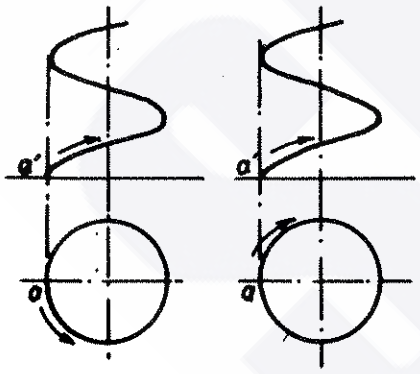
ان المسقط الأمامي للخط الحلزوني في الجهة الأمامية (المرئية) من الاسطوانة (الشكل ٢٨٤) يكون ذا مسار صاعد من اليسار الى اليمين ، أو ذا مسار هابط من الأعلى الى الأسفل نحو اليمين (اذا كان محور السطح الاسطواني أفقيا) • وفي هذه الحالة يكون الخط الحلزوني ذا مسار يميني ، أو ذا اتجاه يميني (خط حلزوني يميني) •

يمثل الشكل (٢٨٦) خطا حلزونيا ذا مسار يساري (خطا حلزونيا يساريا) ، وفي هذه الحالة يصعد مسار المسقط الأمامي للخط الحلزوني في الجهة الأمامية من السطح الاسطواني من اليمين الى اليسار ، أو نحصل على نزول(هبوط) من الأعلى الى الأسفل نحواليسار عندما يكون محور السطح

الاسطواني أفقيا • وأما اذا أعطيت مساقط الخط الحلزوني دون أن نرسم مساقط السطح الاسطواني ، فان مسقطه الجيبي يرسم مرئيا في جميع اجزائه • وفي هذه الحالة يُعد اتجاهه يمينيا أو يساريا ، بالكتابة عليه أو بأسهم تبين اتجاه الخط الحلزوني ، كما هو واضح في الشكل (٢٨٧) : اليسار يمثل خط حلزوني يميني واليمين يمثل خط حلزوني يساري •



شكل رقم (٢٨٦)



شكل رقم (٢٨٧)

IX ـ٣ـ٣ـ نشر (فتح) الخط الحلزوني الاسطواني :

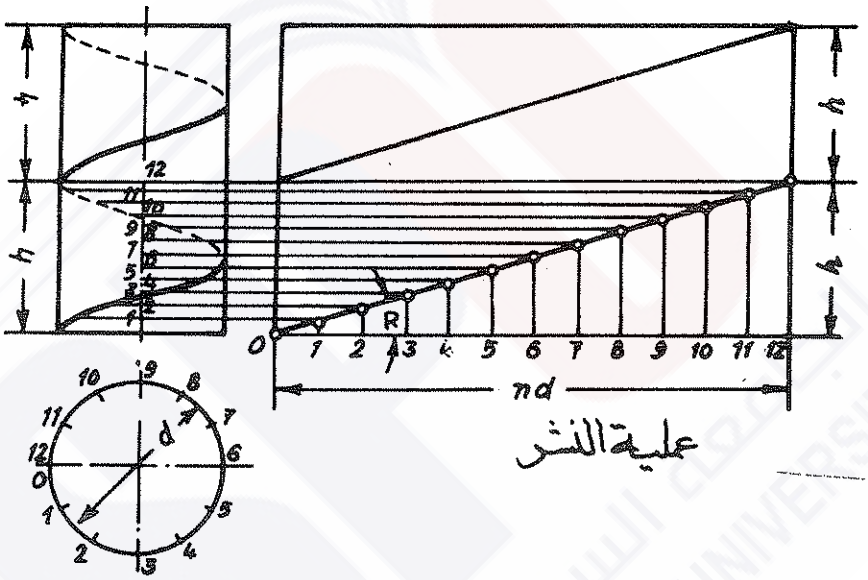
يمكن تسمية ذلك أيضا بالتعبير المستوي الافتراضي للخط الحلزوني الذي يتخذ في هذا التعبير وضعية خط مستقيم ، تتأتى من تمثيل (تكوين) الخط الحلزوني نفسه : قُسمت دائرة قاعدة الاسطوانة الى عدد متساو من الأجزاء وقُسمت خطوة الخط الحلزوني الى العدد نفسه من الأجزاء المتساوية • ولهذا يمكن أن يمثل نشر الخط الحلزوني (مسافة تساوي خطوته) الوضع

الهندسي لمجموعة من النقاط التي تتناسب احداثياتها الصادية (Y) مع احداثياتها السينية (X) ، أي :

$$Y = K X$$

وهذا يمثل ـ كما هو معلوم ـ معادلة خط مستقيم ٠

ونتيجة نشر خطوتين من الخط الحلزوني (الشكل ٢٨٨) نحصل على



شكل رقم (٢٨٨)

خطين مستقيمين يميلان بزاوية α عن المستقيم الذي يمثل نشر دائرة قاعدة الاسطوانة ٠ ويعبر عن ميل ارتفاع (تصاعد) الخط الحلزوني بالعلاقة التالية:

$$tg\ \alpha = \frac{h}{\pi d}$$

حيث أن : h هي خطوة الخط الحلزوني ٠

وأن : d هي قطر الاسطوانة ٠

وتسمى زاوية α بزاوية ارتفاع (التفاف) الخط الحلزوني ٠

طول دورة (لفة) واحدة للخط الحلزوني تساوي :

$$L = \sqrt{h^2 + (\pi d)^2}$$

للاسطوانة أو للاسطوانات ذوات القطر الواحد تعتمد قيمة الزاوية α على خطوة الخط الحلزوني • فللحصول على زاوية صغيرة للارتفاع يجب أن نختار خطوة صغيرة والعكس صحيح •

اذا كانت خطوة الخط الحلزوني واحدة لعدة سطوح اسطوانية ذات أقطار مختلفة ، فان التصاعد (الارتفاع) تكون مختلفة وتتناسب عكسيا مع قطر الاسطوانة •

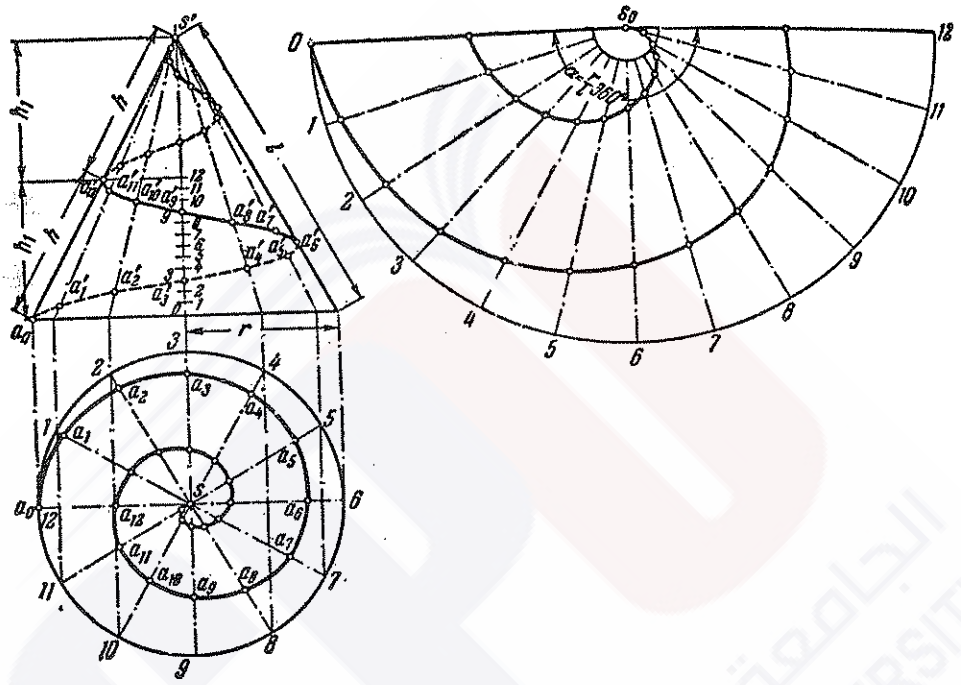
يمكن أن نحصل على نموذج للخط الحلزوني حين نأخذ شكلا رباعيا قائم الزوايا ونرسم أحد أقطاره • عندما نطوي هذا الشكل على شكل اسطوانة دائرية قائمة نجد أن قطر هذا الشكل يكوّن خطا حلزونيا • وهذا يعني أن الخط الحلزوني هو أقصر مسافة بين نقطتين تقعان على السطح الاسطواني الدائري ، وهو يسمى بخط المساحة لهذا السطح •

يمكن أن نمرر عددا غير محدود من الخطوط بين نقطتين واقعتين على سطح ما ، ولكن واحد منها يمثل أقصر مسافة بينهما • وعند نشر هذا السطح نجد أن هذا الخط سيتمثل بخط مستقيم • ومن هنا يمكن تعريف خط المساحة بأنه الخط الذي يمثل أقصر مسافة بين نقطتين تقعان على السطح المعني •

IX ـ٤ـ الخط الحلزوني المخروطي واسقاطه ونشره :

اذا كانت لدينا نقطة تنتقل بحركة منتظمة على الخط المولد للمخروط، في الوقت الذي يدور فيه هذا الخط حول محور المخروط بسرعة زاوية ثابتة،

فان مسار هذه النقطة يمثل خطا حلزونيا مخروطيا ، مسقطاه يوضحهما الشكل (٢٨٩ آ) ، ويكون انتقال النقطة على هذا الخط متناسبا مع الانتقال



شكل رقم (٢٨٩)

الزاوي للخط نفسه • في الشكل (٢٨٩ آ) نجد على سطح المخروط اثنتي عشرة وضعية للخط المولد لموقع النقطة المتحركة عليه في كل وضعية من اوضاعها • ان المسافة بين نقاط الانتقال في كل لفة $h = A_o A_{12}$ ، وهي التي قيست على الخط المولد للمخروط ، تسمى بخطوة الخط الحلزوني المخروطي (تؤخذ أحيانا الخطوة على محور المخروط حيث يمثل طول المقطع h_1 مسقط h على محور المخروط ، وهو نفسه محور الخط الحلزوني • ومن الواضح أن تقسيم h الى n من الأجزاء يتطابق مع تقسيم h_1 الى العدد نفسه من الأجزاء ، والعكس صحيح) •

يمثل المسقط الأمامي للخط الحلزوني المخروطي منحنيا جيبيا متخامدا

(تناقص ارتفاع الموجه) ، ويمثل مسقطه الأفقي حلزون أرخميدس ٠

عند نشر السطح الجانبي للمخروط (الشكل ٢٨٩ ب) نجد أن الخط الحلزوني ينشر أيضا على هيئة حلزون أرخميدس لأن الانتقال الزاوي المنتظم لنصف القطر عند نشر سطح المخروط يوافق الانتقال المنتظم للنقطة على نصف القطر هذا ٠ ويوضح ذلك الشكل نشر الخط الحلزوني للفتين كاملتين ٠

IX ـ٥ـ منحنيات السطوح (السطوح المنحنية) :

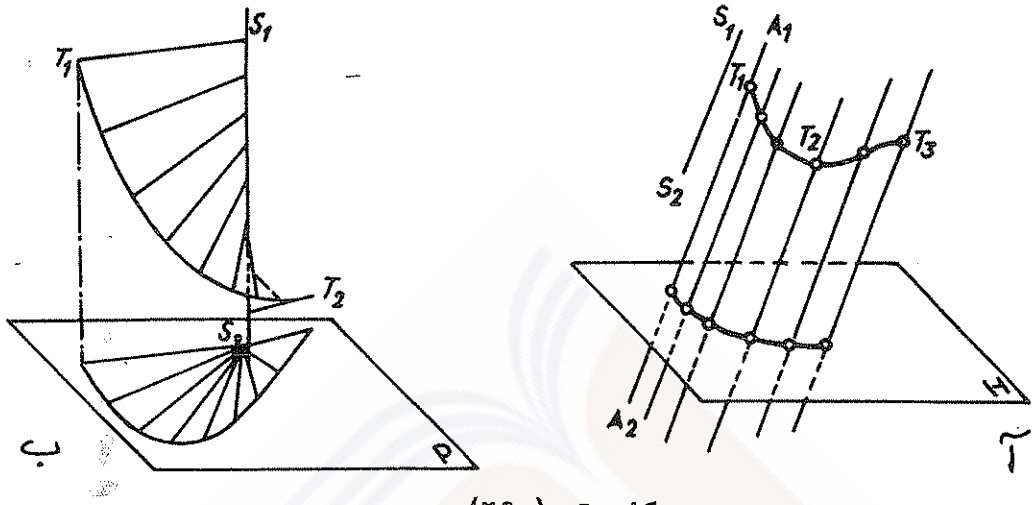
IX ـ٥ـ١ـ مدخل عام :

ان السطوح في الهندسة الوصفية تدرس على أساس انها مجموعة أوضاع متتالية لخط متنقل في الفراغ ٠ ومثل هذا التصور للسطوح يكون مريحا للتكوين (الرسم) التخطيطي ٠

يمكن أن يكون الخط المولد للسطح المنحني خطا مستقيما أو خطا منحنيا ، ويسمى السطح المتكون من حركة خط مولد مستقيم في الفراغ بالسطح الخطي ، ولذا يمثل هذا السطح الأوضاع الهندسية للخطوط المستقيمة، ويسمى السطح المتكون من حركة خط مولد منحن بالسطح اللاخطي ٠

يمثل الشكل (٢٩٠ آ) سطحا خطيا يتكون من حركة المستقيم المولد (ℓ) الذي يوازي في جميع أوضاعه مستقيما ما (S) بانزلاقه على خط منحن ثابت (t) ويسمى بالموجه ٠

ويمثل الشكل (٢٩٠ ب) سطحا خطيا أيضا يتكون من حركة المستقيم المولد (ℓ) الذي يوازي في جميع أوضاعه المستوي (P) بانزلاقه على خطين موجهين ثابتين ، هما المستقيم (S) والمنحني (t) ٠ ويمكن أن تُعد الكرة مثالا واضحا للسطوح غير الخطية ٠



شكل رقم (٢٩٠)

من جهة أخرى يمكن أن ينشأ السطح المنحني الواحد من حركة خطوط مولدة مختلفة وفي ظروف متباينة ، والتي يجب أن تخضع في انتقالها للخط المولد • مثلا : ان السطح الجانبي للاسطوانة الدائرية القائمة (الشكل ٢٩١) يمكن أن يُعد نتاجا لحركة الخط المستقيم المولد (ℓ) ، أو لحركة الخط المولد الذي تمثله الدائرة (K) على امتداد المحور (oo) الذي يمر من مركزها ، أو لحركة الخط المنحني المولد (m) الذي تبعد جميع نقاطه عن المحور (OO) بعد واحدا على امتداد الخط الدائري الموجه (K) • وبشكل عام تكون قوانين تكوين سطح ما متعددة ومتباينة • ومن المفضل أن نختار من كل هذه الاحتمالات المتعددة الاحتمالات الأكثر بساطة أو سهولة لتمثيل (رسم) السطوح وحل المسائل المرتبطة بها •

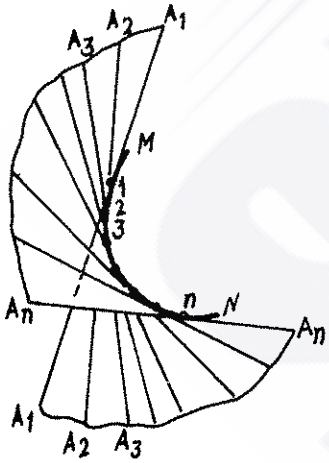
يمكن ـ كما ذكرنا سابقا ـ أن تكون السطوح المنحنية حسب نوعية الخط المولد سطوحا خطية أو سطوحا لاخطية ، وكل نوع منها يمكن أن ينشر في مستو واحد يسمى بالسطوح المنشورة وتسمى السطوح التي لايمكن أن تنشر في مستو واحد بالسطوح غير المنشورة • وسنقتصر في دراستنا هذه على

السطوح الخطية المنشورة في ضوء اختصاصاتنا ٠

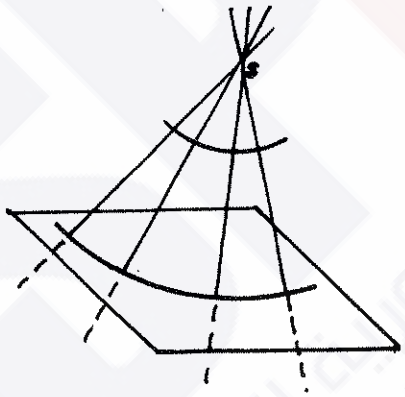
IX-٥-٢- السطوح الخطية المنشورة :

تشمل هذه السطوح : السطوح الاسطوانية والمخروطية والملتوية أو ذات الضلع الارتدادي ٠

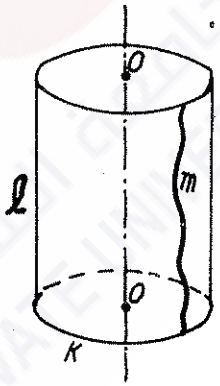
تتكون السطوح الاسطوانية من انتقال خط مستقيم (خط مولد) على مسار خط منحن موجه ، ويحافظ هذا المستقيم في أوضاعه جميعها على موازاته لمستقيم محدد آخر (الشكل ٢٩١) ٠



شكل رقم (٢٩٣)



شكل رقم (٢٩٢)



شكل رقم (٢٩١)

تتكون السطوح المخروطية من حركة المستقيم المولد الذي يمر من نقطة ثابتة وينتقل على مسار الخط المنحني الموجه (الشكل ٢٩٢) ، وتسمى النقطة الثابتة S بقمة (رأس) السطح المخروطي ٠ واذا ابتعدت هذه النقطة S الى مالانهاية ، فان هذا السطح يتخذ هيئة السطح الاسطواني ٠

وأما السطوح الملتوية أو ذوات الضلع الارتدادي ، فانها تتكون من

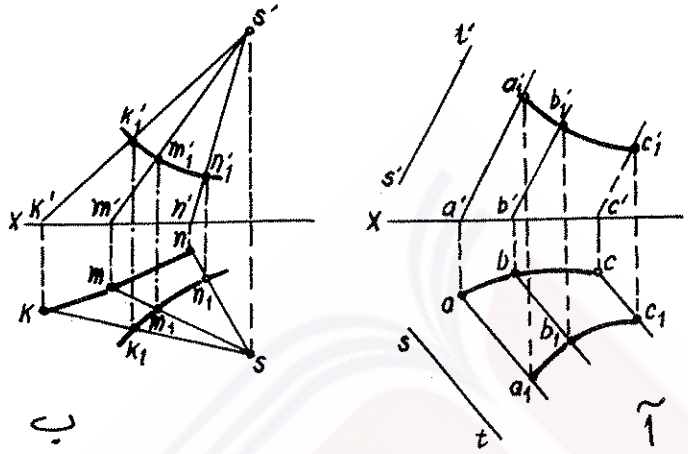
الحركة المستمرة لخط مستقيم مولد يكون في جميع اوضاع حركته مماسا لخط منحن فراغي ما ، يمثل الخط الموجه لهذه السطوح ، ويسمى ضلع الارتداد أو الرجوع • ومثل هذه السطوح يوضحها الشكل (٢٩٣) ويلاحظ أن خطوطها المنشئة $A_1 A_1$ ، $A_2 A_2$ ••• الخ مماسة للمنحني الفراغي MN • يقسم ضلع الارتداد (الرجوع) السطح المنحني الى منطقتين ، واذا تضاءل ضلع الرجوع هذا فغدا نقطة ، فاننا نحصل حينئذ على سطح مخروطي (الشكل ٢٩٢)•

IX ـ٥ـ٣ـ التعبير الاسقاطي للسطوح المنحنية الخطية :

ان اعطاء السطح المنحني اسقاطيا يعني تبيان الشروط المؤمنة رسم كل نقطة من نقاطه • ولتحديد السطح اسقاطيا يكفي أن نحصل على مساقط الخط المولد على مستويات الاسقاط وتبيان كيفية رسم الخط المولد المار من أية نقطة من نقاط الخط الموجه (يمثل الخط الموجه على الأغلب بخط تقاطع هذا السطح مع مستوي الاسقاط الأفقي H) • ويمكن ألا نكتفي بذلك عند الحاجة الى اعطاء صورة أكثر وضوحا ، وذلك برسم أوضاع أخرى مختلفة للخط المولد خلال انتقاله على امتداد الخط الموجه وبرسم خطوط أو نقاط مهمة اضافية على السطح •

عند تقاطع السطوح الاسطوانية والمخروطية مع مستوي الاسقاط يسمى خط التقاطع بأثر السطح في هذا المستوي ، (أثر السطح الأفقي مثلا) •

لدينا في الشكل (٢٩٤ آ) مساقط سطح اسطواني محدد بخطه المنحني المولد $A_1B_1C_1$ واتجاه المستقيم الموجه (المنشئ) ST ولدينا في الشكل (٢٩٤ ب) مساقط سطح مخروطي محدد بخطه المنحني المولد $K_1M_1N_1$ وقمته S •



شكل رقم (٢٩٤)

في كلا الحالتين رسمت آثار السطوح في مستوي الاسقاط الأفقي H ، أي: الخطوط المارة خلال الآثار الأفقية للخط المولد من السطح المعني ، وهي المنحنيات (a'b'c' و abc) و (k'm'n' و kmn) .

ان السطح الاسطواني يمكن أن يعطي بآثاره الأفقية واتجاه خطه الموجه (المنشئ) ، وان السطح المخروطي يعطي بآثاره الأفقية وقمته . وفي هذه الحالة نجد أن اختيار نقطة ما على الأثر تحدد لنا الخط الموجه .

ولرسم ملامح السطوح الاسطوانية أو المخروطية في التعبير الاسقاطي نتبع الخطوات التالية :

نحدد على كل مستو اسقاطي مساقط الخطوط المولدة الحدودية للسطح (حواف السطح) التي تحوي منطقة تقع فيها مساقط بقية عناصر السطح . مثلا : في الشكل (٢٩٥ آ) تحدد الحروف D,C,B,A على آثار السطح الاسطواني تلك النقاط التي تمر من خلالها الخطوط المولدة الحدودية للسطح: A و B للمساقط الأمامية و C و D للمساقط الأفقية . وهذه الحدود

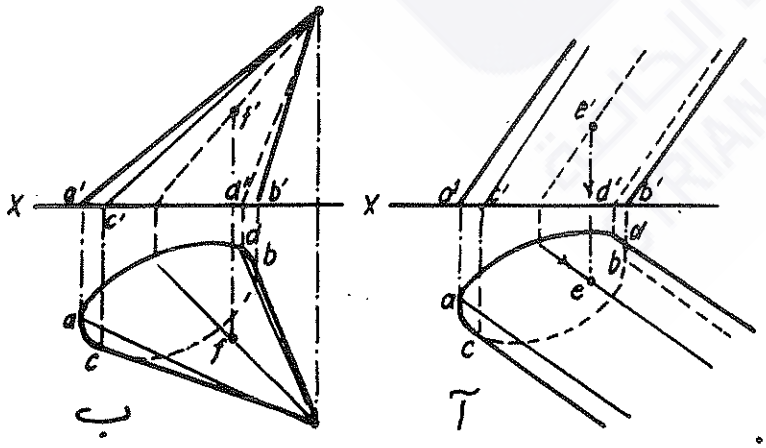
تعين على المسقط وتعين أيضا الأجزاء المرئية وغير المرئية منه ٠

وحسب القواعد العامة يمكن تحديد النقاط الواقعة على السطوح الاسطوانية أو المخروطية بواسطة الخطوط المولدة للسطح المارة من خلال هذه النقاط ٠ وفي بعض الأحيان يصبح من الضروري في تحديد موقع العنصر الهندسي الموجود على السطح ، أن نبيّن موقعه ، وهل هو في الجزء المرئي أم غير المرئي من السطح بالنسبة لمستوي الاسقاط المعني أو بتعبير آخر في المسقط المعني للسطح ٠ وأحيانا تستخدم الأقواس للاشارة الى وجود العنصر في الجزء غير المرئي ٠ مثلا : (e') تعني أن المسقط الأمامي للنقطة E الواقعة على السطح المعني يقع في الجزء غير المرئي من المسقط الأمامي ٠

يوضح الشكل (٢٩٥ آ) طريقة رسم المسقط الأفقي للنقطة E الواقعة على السطح الاسطواني اذا كان مسقطها الأمامي e' معلوما لدينا وواقعا على الجزء غير المرئي من المسقط الأمامي للسطح الاسطواني ٠

ويوضح الشكل (٢٩٥ ب) طريقة رسم المسقط الأمامي للنقطة F الواقعة على السطح الاسطواني اذا كان مسقطها الأفقي f معلوما لدينا وواقعا على الجزء المرئي من المسقط الأفقي للسطح المخروطي ٠

في كلا الحالتين نحدد المساقط المطلوبة بمساعدة الخطوط المولدة للسطح والمارة من خلال هذه النقاط ٠



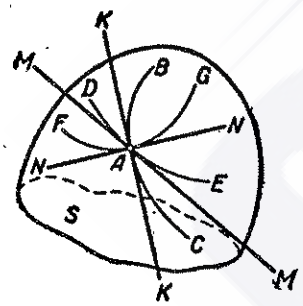
شكل رقم (٢٩٥

IX ـ٦ـ المستويات المماسة للسطوح المنحنية البسيطة :

لرسم السطوح المنحنية في التعبير الاسقاطي وحل بعض المسائل المرتبطة مع هذه السطوح يكون من الضروري أحيانا أن نمرر مستويا موازيا للسطح المنحني المعني ٠

لنأخذ على سطح منحن S (الشكل ٢٩٦) نقطة ما A ، ونمرر منها على السطح المنحني خطوطا منحنية BAC و DAE و FAG ، ٠٠٠ الخ ، ثم نرسم منها مستقيمات مماسة لهذه الخطوط : K K و M M ، ٠٠٠ الخ ٠

اذا كانت النقطة A عامة (غير واقعة على حرف أو قمة مخروط أو ماشابه ذلك) فان جميع هذه المستقيمات المماسية تقع في مستو واحد ، يسمى بالمستوي المماس للسطح المنحني S في النقطة A ٠ وبتعبير آخر نقول : يكون المستوي مماسا للسطح المنحني في احدى نقاطه اذا كانت جميع المستقيمات المماسة لجميع الخطوط المنحنية التي تنتمي الى السطح المنحني في هذه النقطة واقعة في هذا المستوي ٠

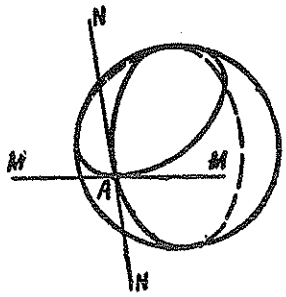


شكل رقم (٢٩٦)

ولما كان أي مستو يمكن أن يحدد بصورة كاملة من خلال معرفة وضعية مستقيمين واقعين فيه ، فان تحديد مستو مماس لسطح منحن في نقطة من نقاطه يتطلب أن تمرر خطين منحنيين في السطح المنحني من هذه النقطة ، وأن نرسم مستقيما مماسا لكل منهما في النقطة نفسها ٠ وهذان المستقيمان المماسان يحددان المستوي المطلوب ٠

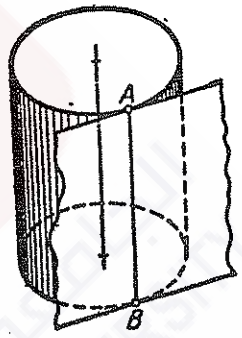
حسب نوع السطح المنحني يمكن أن يحتوي المستوي المماس على نقطة واحدة أو على عدد لامتناه من النقاط المشتركة مع هذا السطح ٠ مثلا :

لايمكن أن تكون للمستوي المماس لسطح كروي أكثر من نقطة واحدة مشتركة مع هذا السطح (الشكل ٢٩٧) ، وأما المستوي المماس لسطح اسطواني فهو يحتوي على عدد لامتناه من النقاط الواقعة على استقامة واحدة تشكل المستقيم AB (الشكل ٢٩٨) .



شكل رقم (٢٩٧)

واذا درسنا سطحا منحنيا خطيا فاننا نلاحظ أن أحد الخطوط الواقعة عليه والمارة من النقطة المنحنية يمكن أن يكون مستقيما مولدا للسطح نفسه . من جهة أخرى يكون الماس لمستقيم ما متطابقا مع هذا المستقيم . ولهذا نجد أن المستوي المماس لسطح منحن خطي في نقطة من نقاطه يحتوي على خط مستقيم يمثل مستقيما مولدا للسطح المنحني ، يمر من هذه النقطة ، ويمثل خط التماس بين المستوي والسطح المنحني ، ويمكن استخدام هذه الخاصية عندما نمرر مستويات مماسة لسطوح اسطوانية أو مخروطية .



شكل رقم (٢٩٨)

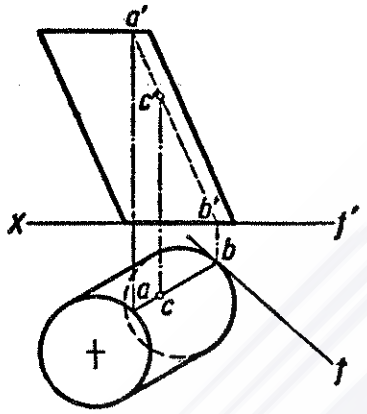
نعدد فيمايلي بعض الأمثلة لحل مسائل تمرير مستويات مماسة لبعض السطوح المنحنية البسيطة .

مثال ١ : مرر من النقطة C مستويا مماسا للسطح الاسطواني المائل الذي يقطع مستوي الاسقاط الأفقي H بدائرة .

ملاحظة : قبل البدء بحل المسألة المطلوبة لابد أن نشير الى أن هذه المسألة قابلة للحل عندما تكون هذه النقطة واقعة على سطح الاسطوانة أو خارجها

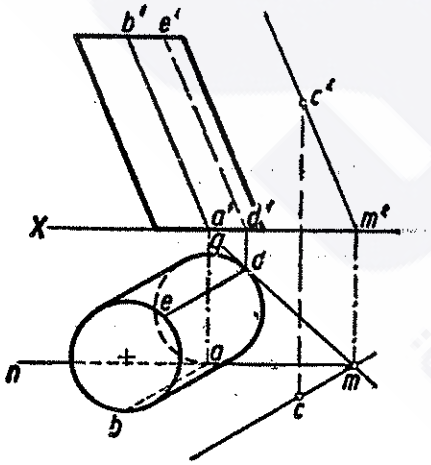
وليس داخلها .

الحـــل ١ : النقطة واقعة على سطح الاسطوانة (الشكل ٢٩٩).ولمـــا كـان السطح الاسطواني هو سطح منحن خطي نمرر من النقطة C خطا مستقيما مولدا AB ، وبهذا نحصل على مستقيم ينتمي الـــى المستوي المطلوب . ومن النقطة B نمـرر مستقيما BF مماسا للأثر الأفقي للســطح الاسطواني ، وبذلك نحصل على مستقيميـن AB و BF يحددان المستوي المطلوب ، ويمثل المستقيم BF ـ كما هو واضـــح ـ الأثر الأفقي للمستوي المماس .



شكل رقم (٢٩٩)

الحـــل ٢ : النقطة C واقعة خارج السطح الاسطواني (الشكل ٣٠٠).يحتوي المستوي المطلوب على مستقيم مولـــد للسطح الاسطواني ويعني هـــــذا أن المستوي يوازي اتجاه مولد الســـطح الاسطواني ، فاذا مررنا من النقطـة C مستقيما CM موازيا لمولد الســـطح الاسطواني فان هذا المستقيم يمثل أحـد مستقيمات المستوي المماس المطلوب . بعد تحديد الأثر الأفقي (النقطة M) لهذا المستقيم ـ وهذا الأثر يمثل أحـد نقاط الأثر الأفقي للمستوي المعني ـ نرسم من النقطة m المستقيم mn مماسا للأثر الأفقي للسطح الاسطوانـــي

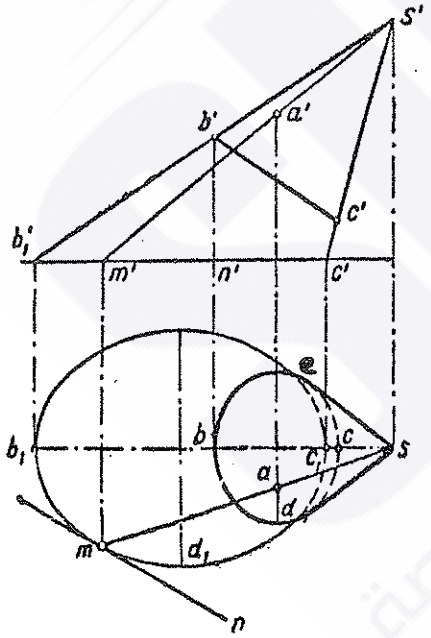


شكل رقم (٣٠٠)

في النقطة a ، وبذلك نحصل على المستقيمين CM و MN اللذين يحددان المستوي المماس المطلوب الذي يمس السطح الاسطواني على امتداد المستقيم المولد AB ٠

هنالك حل آخر لهذا المثال وهو : بعد أن نرسم المستقيم CM (الشكل ٣٠٠) نمرر ـ كما هو وارد في الحل السابق ـ من النقطة m مستقيما mq مماسا للأثر الأفقي للسطح الاسطواني في النقطة d ، وبهذا نحصل على المستقيمين CM و MQ اللذين يحددان المستوي الذي يعد مماسا ثانيا للسطح الاسطواني والذي يمسّه على طول المستقيم المولد DE ٠

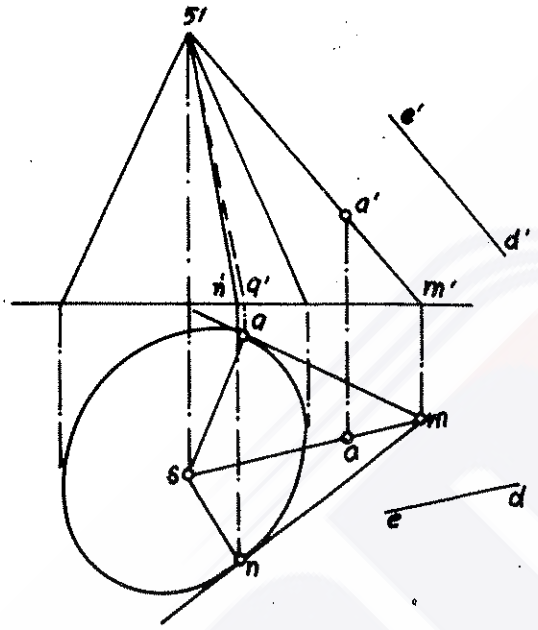
مثال ٢ : ارسم مستويا مماسا لسطح مخروط ومارا من النقطة A الواقعة على هذا السطح المحدد بمسقطي قمته S (الشكل ٣٠١) والمسقط الأمامي b'c' لمولده BC والمسقط الأفقي للقطع الناقص bdce ٠



شكل رقم (٣٠١)

الحل : قبل كل شيء نحدد الأثر الأفقي للسطح المخروطي المتمثل بالخط المنحني $b_1d_1c_1e_1$، ونحدد نقاط هذا الأثر بواسطة تحديد آثار بعض المستقيمات المولدة للسطح المخروطي ، ونوصل هذه النقاط بخط منحن منتظم ٠ بعد ذلك نتبع الخطوات الواردة في مثالثنا السابق ٠ يمثل المستقيم المولد SM المار من النقطة A خط تماس المستوي المطلوب مع السطح المخروطي ، فهو أحد مستقيمات هذا المستوي ٠ واذا رسمنا المستقيم mn مماسا للأثر الأفقي

للسطح المخروطي في النقطة m نحصل على المستقيم الثاني الذي ينتمي الى المستوي • وبالتالي نحدد المستوي المماس بالمستقيمين S M و M N المتقاطعين في النقطة M •



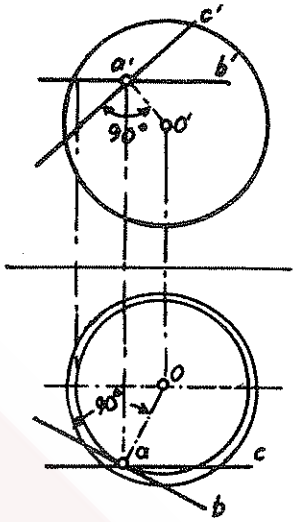
شكل رقم (٣٠٢)

اذا كانت النقطة A خارجة عن السطح المخروطي (الشكل ٣٠٢) فان حل المثال السابق يتم وفق الطريقة التالية : ان المستوي المماس للسطح المخروطي لابد أن يمر من قمة المخروط S ، ولذلك نمرر مستقيما من النقطتين S و A ، وبهذا نحصل على أحد مستقيمات المستوي SA ، ثم نحدد الأثر الأفقي m لهذا المستقيم ، ومنه نمرر مستقيما mn مماسا للأثر الأفقي للسطح المخروطي في النقطة n ، وحين نوجد المسقط الأمامي لهذا المستقيم m'n' نحصل على مستقيمين SA و MN يحددان المستوي المماس للسطح المخروطي والمار من النقطة A • اننا نحصل ـ كما هو واضح في الشكل (٣٠٢) ـ على وضعيتين مختلفتين للمستقيم MN المماس للسطح المخروطي والمار من النقطة M ، وبالتالي نحصل على مستويين مماسين للسطح المخروطي ومارين من النقطة A•

مثال ٣ : ارسم مستويا مماسا لسطح كروي مارا من النقطة A الواقعة على هذا السطح الكروي •

الحل : يمكن حل هذه المسألة انطلاقا من أن المستوي المماس للسطح

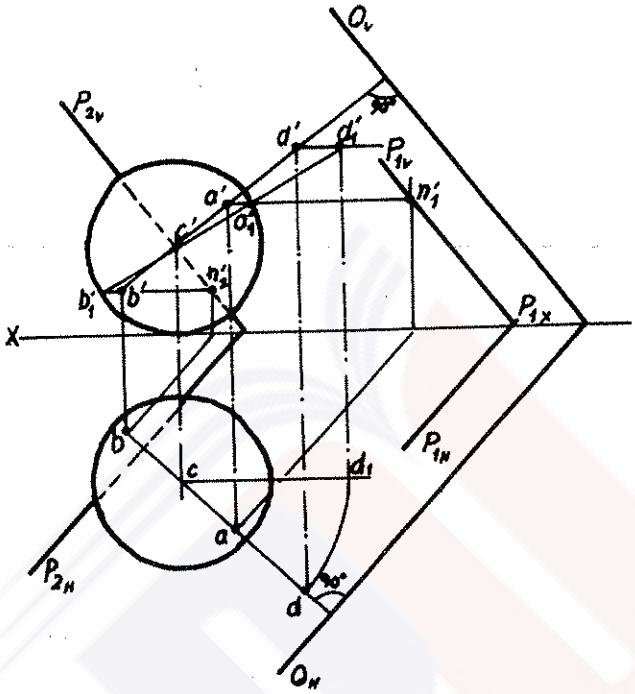
الكروي يكون عموديا على نصف قطر الكرة المار من نقطة التماس • ولذلك نمرر من النقطة A أفق المستوي المطلوب AB وجبهته AC (الشكل ٣٠٣) ، ولذلك على أساس أن المسقط الأفقي ab عمودي على المسقط الأفقي لنصف قطر الكرة وأن المسقط الأمامي a'c' عمودي على المسقط الأمامي لنصف قطر الكرة • وبذلك يحدد أفق المستوي AB وجبهته AC المستوي المماسي المطلوب •



شكل رقم (٣٠٣)

مثال ٤ : ارسم مستويا مماسا للسطح الكروي وموازيا للمستوي Q (الشكل ٣٠٤) •

الحل : ان نصف قطر السطح الكروي المار من نقطة التماس يكون عموديا على المستوي المماس لهذا السطح في هذه النقطة • ولذلك نرسم مستقيما CD عموديا على المستوي Q ، فيحدد هذا المستقيم اتجاه قطر السطح الكروي الذي تمثل نهايتاه نقطتي تماس المستويين المطلوبين (في الحالة العامة يمكننا أن نحصل على مستويين مماسين للسطح الكروي وموازيين للمستوي Q في الوقت نفسه) • وبعد ذلك نأخذ مقطعا كيفيا CD من هذا المستقيم ونُدّوره حول محور عمودي على المستوي H حتى يتخذ الوضعية CD_1 الموازية للمستوي V ، وتمثل النقطتان a_1' و b_1' المسقطين الأماميين لنقطتي تماس المستويين المطلوبين مع السطح الكروي ، وتمثل هاتان النقطتان نهايتي قطر السطح الكروي الذي يعامد المستويين المماسين المطلوبين ،



شكل رقم (٣٠٤)

ولكن a'b' يمثل المسقط الأمامي لقطر السطح الكروي في وضعيته الجديدة بعد التدوير ، ولذلك نقوم بعملية تدوير عكسية لاعادته الى وضعيته الأولية، فنحصل عندئذ على النقطتين A(a ,a') و B(b , b') في وضعهما الأساسي.

بعد ذلك يبقى أن نمرر المستويات المطلوبة الموازية للمستوي Q من النقطتين A و B من خلال المستقيمات الأفقية أو الأمامية التي تنتمي هاتان النقطتان اليهم ، وبواسطتها نرسم آثار هذين المستويين .